This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

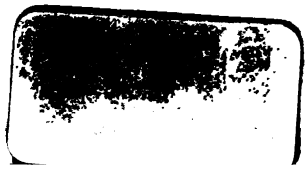
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

3 3433 06642812 3



Waltenhofen

255099

Die

Internationalen absoluten Maße

insbesondere die

Electrischen Maße

für

Studirende der Electrotechnik

in

Theorie und Anwendung dargestellt und durch Beispiele erläutert

von

Dr. A. von Waltenhofen

K. K. Hofrathe und emerit. Professor an der Universität in Innsbruck und an den technischen Hochschulen in Prag und Wien ꝛc.

Dritte

zugleich als **Einleitung in die Electrotechnik** bearbeitete Auflage

---

Mit 42 eingedruckten Figuren

Braunschweig

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn

1902

Ankündigung.

Die vorliegende dritte Auflage, die im Vergleiche mit der zweiten nahezu den doppelten Umfang aufweiſet, läßt die bei der neuen Bearbeitung durchgeführte Vermehrung des Inhaltes ſchon äußerlich erkennen. Der Verfaſſer hat damit beabſichtigt, ſein Buch über die electriſchen Maße auch zugleich als Einleitung in die Electrotechnik brauchbar zu machen.

Schon im erſten Theile hat das über electriſche Condenſatoren, electriſche Energie, electromotoriſche Kraft, electriſches Leitungsvermögen u. ſ. w. Geſagte weſentliche Begründungen und Erweiterungen erfahren.

In viel größerem Maße gilt dies vom zweiten Theile, wobei die practiſchen Anwendungen im Gebiete der Electrotechnik beſondere Berückſichtigung gefunden haben.

Hierher gehören z. B. die ausführlichere Erörterung der magnetiſchen Permeabilität, die der neubearbeiteten Berechnung der Dynamomaſchine vorausgeſchickten Paragraphen über Characteriſtik, Güteverhältniß und Strom- und Spannungscurven der Dynamomaſchinen verſchiedener Schaltungsart; ferner die mathematiſche Definition und Erläuterung des Begriffes der Potentialfunction und der Niveauflächen, die für die Kabeltelegraphie wichtige Theorie der Ladung und Entladung eines Condenſators, ſodann die Beſprechung der verſchiedenartigen Galvanometer, ihrer Principien, Eigenſchaften, Hilfsvorrichtungen und Anwendungen für wiſſenſchaftliche und techniſche Zwecke.

Die Lehre von der Selbſtinduction und gegenſeitigen Induction iſt gleichfalls neu bearbeitet und durch Lehrſätze und Formeln für die Berechnung von Inductions-Coefficienten erweitert worden.

Die völlig umgearbeitete Lehre von den Wechſelſtrömen hat am meiſten an Inhalt und Ausdehnung gewonnen durch die mathematiſche und an Zahlenbeiſpielen erläuterte Betrachtung von Wechſelſtromkreiſen, die inductive Widerſtände oder Capacitäten oder Beides zugleich enthalten, ferner durch die Theorie der electriſchen Schwingungen und Reſonanz und endlich durch das über oscillirende und rotirende Magnetfelder, über Transformatoren und über Drehſtrommotoren Geſagte.

Die Theorie der Kraftübertragung iſt durch einen Paragraph über die Zugkraft vervollſtändigt und in den Paragraphen über die Bemeſſung electriſcher Leitungen und die dabei in Betracht kommende Erwärmung der Stromleiter ſind die theoretiſchen Grundlagen etwas eingehender als in der zweiten Auflage dargelegt.

Neuere Arbeiten ſind überall, namentlich in den Zahlenangaben, entſprechend berückſichtigt.

Das Buch iſt zunächſt für Studirende an techniſchen Hochſchulen, zugleich aber auch als Nachſchlagebuch für Phyſiker und Electro-Ingenieure beſtimmt.

Braunſchweig, im Juni 1902.

Friedrich Vieweg und Sohn.

Die

Internationalen abſoluten Maße

insbeſondere die

Electriſchen Maße

Die

Internationalen absoluten Maße

insbesondere die

Electrischen Maße

für

Studirende der Electrotechnik

in

Theorie und Anwendung dargestellt und durch Beispiele erläutert

von

Dr. A. von Waltenhofen

K. K. Hofrathe und emerit. Professor an der Universität in Innsbruck und an den technischen Hochschulen in Prag und Wien ꝛc.

Dritte

zugleich als **Einleitung in die Electrotechnik** bearbeitete Auflage

Mit 42 eingedruckten Figuren

Braunschweig

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn

1902

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
255039
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
R 1902 L

Alle Rechte, namentlich dasjenige der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten

Vorwort zur dritten Auflage.

Bei der Bearbeitung der dritten Auflage hat der Verfasser die Absicht verfolgt, seine Schrift durch eine passend ausgewählte Vermehrung des Lehrstoffes so zu erweitern, daß sie nicht nur ein gründliches Studium der internationalen und insbesondere der electrischen Maße vermitteln, sondern auch geeignet sein soll, als Einleitung in die Electrotechnik im Allgemeinen dienlich zu sein, ein Ziel, das theilweise auch schon in der zweiten Auflage im Auge behalten war. In der dritten Auflage wurde in dieser Richtung weiter gegangen und eine Vermehrung des Inhaltes durchgeführt, die den Umfang des Buches im Vergleiche mit der zweiten Auflage nahezu verdoppelt hat.

Ohne Anführung einer Inhaltsübersicht sei hierüber nur folgendes bemerkt.

Im ersten Theile haben vornehmlich die mechanischen Maße eine eingehendere Behandlung erfahren, insofern namentlich die Gravitation und das mechanische Wärmeäquivalent gründlicher und ausführlicher erörtert worden sind.

Dabei hat der Verfasser seine Darlegungen, insoweit sich diese auch auf die Gravitation der Himmelskörper beziehen, durch Zahlenbeispiele erläutert und die im §. 14 aufgestellte Masseneinheit und Krafteinheit angewendet, um die hier in Betracht kommenden Größen anschaulicher zu machen. Eine Vergleichung dieser Einheiten mit den aus dem Gravitationsgesetze abgeleiteten ist im §. 56 gegeben.

Auch das über electrische Condensatoren, electrische Energie, electromotorische Kraft, electrisches Leitungsvermögen u. s. w. Gesagte hat wesentliche Begründungen und Erweiterungen aufzuweisen.

Im zweiten Theile ist die eingehendere Berücksichtigung der mechanischen Maße gleichfalls zur Geltung gekommen (erster Abschnitt), vor-

nehmlich aber sind die auf Magnetismus und Electricität bezüglichen Abschnitte größtentheils neu bearbeitet und sehr beträchtlich erweitert worden, und zwar mit besonderer Rücksicht auf die Anwendungen im Gebiete der Electrotechnik. Hierher gehören z. B. im zweiten Abschnitte die ausführlichere Erörterung der magnetischen Permeabilität und die der neubearbeiteten Berechnung der Dynamomaschinen vorausgeschickten Paragraphen über die Deprez'sche und Hopkinson'sche Characteristik, über Güteverhältnisse und über Strom- und Spannungs-Curven der Dynamomaschinen verschiedener Schaltungsart.

Der dritte Abschnitt beginnt mit einer Darlegung des (in der zweiten Auflage nicht näher erörterten) Begriffes der Potentialfunction und der Niveauflächen, wobei die Darstellung der Kraftcomponenten im Sinne der Potentialtheorie ihre mathematische Begründung findet. Ein Paragraph über die Theorie der Ladung und Entladung eines Condensators und eine Liste von specifischen Widerständen sind diesem Abschnitte neu eingefügt worden.

Im vierten Abschnitte ist dem (auch schon in der zweiten Auflage enthaltenen) Paragraphen über die Tangentenbussole eine allgemeine Besprechung der Galvanometer, ihrer Principien, Eigenschaften, Hilfsvorrichtungen und Anwendungen vorausgeschickt.

Die gleichfalls in den vierten Abschnitt eingereihte Lehre von der Selbstinduction ist ganz umgearbeitet und wesentlich erweitert durch die Erklärung des Coëfficienten der gegenseitigen Induction und durch Hinzufügung von Paragraphen über die Berechnung der Inductions-Coëfficienten.

Die bedeutendste Erweiterung ist der im fünften Abschnitte behandelten und neubearbeiteten Lehre von den Wechselströmen zu Theil geworden durch die mathematische und an Zahlenbeispielen erläuterte Betrachtung von Wechselstromkreisen, die inductive Widerstände, oder Capacitäten, oder Beides enthalten, ferner durch die Theorie der electrischen Schwingungen und der electrischen Resonanz, und endlich durch die Paragraphen über oscillirende und rotirende Magnetfelder, über Transformatoren und Drehstrommotoren.

Im sechsten Abschnitte ist dem (auch schon in der zweiten Auflage enthaltenen) Paragraphen über die Kraftübertragung ein eigener Paragraph über die Zugkraft angefügt und in dem den Schluß des sechsten Abschnittes bildenden Paragraphen über die Bemessung electrischer Leitungen und über die dabei in Betracht kommende Erwärmung der Stromleiter

sind die theoretischen Grundlagen etwas ausführlicher als in der zweiten Auflage dargelegt worden.

Daß in der dritten Auflage die neueren Arbeiten überall, namentlich in den Zahlenangaben, entsprechend berücksichtigt wurden, bedarf wohl kaum einer ausdrücklichen Erwähnung.

Das Buch ist zwar zunächst für Studirende der Electrotechnik an technischen Hochschulen bestimmt, dürfte aber auch dem Physiker und dem Electro-Ingenieur als Nachschlagebuch willkommen sein.

Die für die dritte Auflage neu angefertigten Zeichnungen hat Herr Ingenieur Premauer nach meinen Skizzen gefälligst ausgeführt, wofür ich ihm meinen verbindlichsten Dank sage.

Auch den Herren Verlegern danke ich bestens für die meinen Wünschen entsprechende Ausstattung des Buches und für das mir bei jeder Gelegenheit erwiesene freundliche Entgegenkommen.

Wien, im Mai 1902.

Inhalts-Ueberſicht.

Erſter Theil.

Einleitung.

Seite

1. Naturgeſetze. Maße. — 2. Naturmaße. — 3. Mechaniſche und phyſicaliſche Maße, Grundmaße. Krafteinheit. — 4. Abſolute Maße. Gaußiſche Einheiten. — 5. Abgeleitete Maße. — 6. Zuſammenhang zwiſchen den Grundmaßen. Maſſeneinheit. — 7. Urmaße und Copien. — 8. Dimenſionsformeln. — 9. Anwendung der Dimenſionsformeln. — 10. Das C-G-S-Syſtem. — 11. Practiſche Einheiten . . . . . 1 bis 13

I. Mechaniſche Maße.

12. Längeneinheit. Zeiteinheit. Maſſeneinheit. — 13. Geſchwindigkeit. Beſchleunigung. — 14. Kraft. — 15. Schwerkraft. Gewicht. — 16. Irdiſches Maßſyſtem. — 17. Gravitationsconſtante. — 18. Arbeit. — 19. Drehungsmoment. — 20. Trägheitsmoment. — 21. Lebendige Kraft. — 22. Energie. — 23. Wärmeäquivalent. — 24. Arbeitsſtärke. Leiſtung. Effect . . . . . 14 bis 36

II. Magnetiſche Maße.

25. Magnetiſche Quantität. — 26. Magnetiſches Moment. — 27. Potentialfunction und Niveauflächen. — 28. Intenſität eines magnetiſchen Feldes. Feldſtärke. — 29. Kraftlinien. — 30. Magnetiſches Drehungsmoment . . . . . 36 bis 42

III. Electroſtatiſche Maße.

31. Electricitätsmenge. — 32. Mechaniſches Strommaß. — 33. Electroſtatiſches Potential und electriſches Feld. — 34. Capacität. — 35. Condenſatoren. — 36. Electriſche Energie. — 37. Entladungsſtrom. — 38. Leitungswiderſtand. Ohm'ſches Geſetz. — 39. Stromleiſtung . . . . . 42 bis 53

IV. Electromagnetiſche Maße.

40. Strommaß. — 41. Electricitätsmenge. — 42. Ampère-Stunde, -Minute, -Secunde. — 43. Electromotoriſche Kraft. — 44. Leitungswiderſtand. — 45. Specifiſcher Widerſtand. — 46. Leitungsfähigkeit. — 47. Capacität. — 48. Electriſche Energie. — 49. Electriſche Arbeit. — 50. Stromleiſtung . . . . . 53 bis 79

V. Vergleichung des electroſtatiſchen und des electromagnetiſchen Syſtems.

Seite

51. Verhältniß der Dimenſionen. — 52. Verhältniß der Einheiten 79 bis 8

Zweiter Theil.

Zuſätze und Erläuterungen.

I. Abſchnitt.

53. Maſſe und Gewicht. Schwere. — 54. Aeltere Maßſyſteme. — 55. Secundenpendel. — 56. Verſchiedene Grundmaße. — 57. Urmaße (Prototype). — 58. Gravitation. — 59. Schwerkraft. — 60. Jolly's Waagen. — 61. Gravitationsconſtante. — 62. Arbeit. Antrieb. — 63. Calorie. — 64. Arbeitsſtärke . . . . . 83 bis 9

II. Abſchnitt.

65. Freier Magnetismus. Tragkraft. — 66. Magnetiſches Moment. — 67. Experimentelle Ermittelung von M und H. — 68. Sättigungsgrad. — 69. Magnetiſirungsfunction. — 70. Permeabilität. — 71. Tragkraft, magnetiſche Induction und Permeabilität. — 72. Magnetiſches Maximum. — 73. Magnetiſirungsformeln. — 74. Verhalten des Stahles und feinzertheilten Eiſens. — 75. Magnetiſche Rückſtände. — 76. Hyſtereſis. — 77. Magnetiſcher Widerſtand. — 78. Characteriſtik. — 79. Güteverhältniß. — 80. Strom- und Spannungs-Curven. — 81. Berechnung der Dynamomaſchinen . . . . . 99 bis 155

III. Abſchnitt.

82. Potentialfunction, Niveauflächen und Kraftlinien. — 83. Electriſche Flächendichte. — 84. Abſolutes Electrometer. — 85. Funken und Lichtbogen. — 86. Condenſator. — 87. Vertheilungszahl. — 88. Ladung und Entladung eines Condenſators. — 89. Kabel. — 90. Iſolationswiderſtand. — 91. Specifiſche Widerſtände. — 92. Hydroelectriſche Ketten. — 93. Electriſche Sammler . . . . . 155 bis 198

IV. Abſchnitt.

94. Galvanometer. — 95. Richtigkeit, Genauigkeit und Empfindlichkeit. — 96. Spiegelableſung. Aſtaſirung. — 97. Dämpfung. Aperiodiſcher Zuſtand. — 98. Nebenſchlüſſe. — 99. Indirecte Strommeſſung. — 100. Techniſche Galvanometer. — 101. Ampèremeter, Voltmeter, Wattmeter. — 102. Tangentenbuſſole. — 103. Anwachſen und Abfallen eines electriſchen Stromes. Selbſtinduction. — 104. Coëfficient der Selbſtinduction. — 105. Berechnung der Selbſtinductions-Coëfficienten. — 106. Coëfficient der gegenſeitigen Induction. — 107. Beſondere Fälle . . . . . 198 bis 236

V. Abſchnitt.

108. Wechſelſtröme. — 109. Induction durch Wechſelſtröme. — 110. Leiſtung der Wechſelſtröme. — 111. Indutiver Widerſtand. —

Seite

112. Hintereinander und nebeneinander geſchaltete inductive Leiter. — 113. Condenſator im Wechſelſtromkreiſe. — 114. Capacität und Selbſtinduction im Wechſelſtromkreiſe, Phaſenrückverſchiebung. — 115. Electriſche Schwingungen und Reſonanz. — 116. Zur Theorie der electriſchen Schwingungen. — 117. Oscillirende und rotirende Magnetfelder. Drehfeld. Drehſtrom. — 118. Wechſelſtromumformer. Transformator. — 119. Drehſtrommotoren . . . . . 236 bis 284

VI. Abſchnitt.

120. Kraftübertragung. — 121. Zugkraft. — 122. Bemeſſung electriſcher Leitungen. — 123. Erwärmung der Stromleiter . . . . . 285 bis 297

Erſter Theil.

Einleitung.

Naturgeſetze. Maße. Unſere Kenntniſſe von den Geſetzen der Natur 1
ſind aus Unterſuchungen hervorgegangen, die den Zweck hatten, zwiſchen den Zahlenwerthen der bei der unterſuchten Erſcheinung in Betracht kommenden Größen einen geſetzmäßigen Zuſammenhang aufzufinden. Als Größe bezeichnen wir etwas ſinnlich wahrnehmbares, inſofern es meßbar iſt. Eine gegebene Größe meſſen heißt ermitteln, wie viel mal in derſelben eine gleichartige als Vergleichungseinheit, d. i. als Maß angenommene Größe enthalten iſt. Uebrigens können wir Größen nicht immer unmittelbar mit einander vergleichen, ſondern oft nur mittelbar durch Vergleichung anderer Größen, die mit jenen in einem bekannten Zuſammenhange ſtehen. So ermitteln wir z. B. das Verhältniß der Maſſen zweier Körper durch die Vergleichung ihrer Gewichte, von denen wir wiſſen, daß ſie mit den Maſſen proportional ſind [1]).

Naturmaße. Bei der Aufſtellung von Maßeinheiten war man ſchon 2
in den älteſten Zeiten darauf bedacht, in der Regel Größen zu wählen, die die Natur unmittelbar darbietet, wie z. B. die Dimenſionen menſchlicher Körpertheile, die Gewichte von Getreidekörnern u. ſ. w. So entſtanden die als Fuß, Elle, Klafter, Gran u. ſ. w. benannten Maße, während man die Zeitmaße (Tag, Stunde, Minute, Secunde, Jahr, Monat) aus den Bewegungen der Himmelskörper herleitete.

Dieſe aſtronomiſchen Zeitmaße waren ſchon in ſehr früher Zeit mit großer Genauigkeit feſtgeſtellt und ein Gemeingut der Völker geworden, dagegen iſt eine ſolche Beſtimmtheit und internationale Gemeinſchaft bei den Einheiten für räumliche Größen und Maſſen (Gewichte) erſt in neuerer Zeit durch die Einführung des metriſchen Maß- und Gewichtsſyſtemes erreicht worden, das gegenwärtig von den meiſten civiliſirten Staaten der Welt angenommen iſt.

[1]) Folgerung aus der gleichen Fallbeſchleunigung von Körpern verſchiedenen Gewichtes (Galilei). Näheres hierüber im II. Theile, § 53, dritte Anmerkung.

So wie unsere aus den Bewegungen der Himmelskörper abgeleiteten Zeitmaße Naturmaße sind, so sind es auch die metrischen Maß- und Gewichtseinheiten insofern, als bei deren Aufstellung die Abmessungen des Erdkörpers und die Dichte des Wassers als Grundlagen gedient haben [1]).

3 **Mechanische und physicalische Maße. Grundmaße. Krafteinheit.** Die Maße aller Größen, die in der Mechanik in Betracht kommen (Geschwindigkeit, Beschleunigung, Bewegungsgröße, Kraft, Arbeit, Potential u. s. w.), können, wie später gezeigt werden soll, auf die Maße für Raumgrößen, Zeit und Masse zurückgeführt werden, weßhalb man diese letzteren Maße auch die Grundmaße der Mechanik nennt. Da man ferner auch die Einheiten für Flächen- und Körperräume auf die Längeneinheit zurückgeführt hat, indem man das Quadrat und den Würfel der Längeneinheit als Flächeneinheit und Volumseinheit gebraucht, so können wir geradezu Längeneinheit, Zeiteinheit und Masseneinheit als die Grundmaße der Mechanik ansehen.

Diese Grundmaße der Mechanik können aber auch als die Grundmaße für viele andere physicalische (z. B. magnetische, electrische, calorische) Größen angesehen werden, nämlich für alle, deren Messung wir auf die Messung mechanischer Größen gründen. Dies ist z. B. der Fall, wenn wir als Einheit der Electricitätsmengen eine solche festsetzen, die auf eine gleich große, im Abstande der Längeneinheit befindliche, eine Abstoßung oder Anziehung vom Betrage der Krafteinheit ausübt, oder wenn wir als Stromeinheit eine Stromstärke wählen, bei der in der Zeiteinheit die eben definirte Einheit der Electricitätsmengen durch den Querschnitt des Leiters geht u. s. w., auf welche Definitionen wir später eingehend zurückkommen werden. Die so definirten Einheiten für Electricitätsmenge und Stromstärke sind offenbar bestimmt, sobald die Einheiten für Länge, Zeit und Masse festgesetzt sind, denn in diesem Falle ist ja auch die in der Definition der Electricitätseinheit vorkommende Krafteinheit bestimmt, als die wir bekanntlich die Kraft ansehen, die der Masseneinheit in der Zeiteinheit eine Beschleunigung [2]) vom Betrage der Längeneinheit ertheilt.

---

[1]) Wir wollen übrigens bei dieser Gelegenheit bemerken, daß das Meter, das bekanntlich den zehnmillionten Theil des durch Gradmessungen ermittelten Erdquadranten darstellen soll, in Folge eines von Bessel nachgewiesenen Rechnungsfehlers um 0,0086 Proc., also beinahe um ein Zehntel eines Millimeters zu klein angenommen worden ist, nämlich = 443,296 Linien der peruanischen Toise von Bouguers bei 13° R., anstatt 443,334. Siehe S. Günther, Handbuch der mathematischen Geographie (1890), S. 298. Nach Bessel hat der Meridianquadrant 10000856 Meter (Rosenberger, Geschichte der Physik, 3. Teil, S. 95).

[2]) Beschleunigung oder Geschwindigkeitszuwachs in der Zeiteinheit $j = \frac{dv}{dt}$, wenn $v = \frac{ds}{dt}$, wobei v die augenblickliche Geschwindigkeit des Beweglichen, s die

Absolute Maße. Gaußische Einheiten. Die gegenwärtig gebräuch- 4
lichen electrischen Maße gehören in die Categorie der sogenannten absoluten Maße, über deren Wesenheit wir uns verständigen wollen.

Die Bezeichnung „absolutes Maß" rührt bekanntlich von Gauß her, der die von ihm aufgestellte Einheit für die Intensität der erdmagnetischen Kraft und die dieser Einheit zu Grunde gelegten Einheiten für Kräfte überhaupt und für magnetische Quantitäten „absolute" Einheiten genannt hat [1]). Die Bezeichnung „absolut" will hier so viel sagen wie „unabhängig", nämlich von Zeit und Ort der Beobachtung, also vollkommen bestimmt oder „definirt". In der That erhalten wir z. B. eine von Zeit und Ort der Beobachtung unabhängige Krafteinheit, wenn wir mit Gauß jene Kraft als Einheit der Kräfte annehmen, die der Masse eines Cubikmillimeters Wasser in der Secunde die Beschleunigung eines Millimeters ertheilt. Diese Unabhängigkeit ist nicht vorhanden, wenn wir z. B., ohne eine bestimmte Schwere-Beschleunigung anzugeben, das Gewicht eines Cubikmillimeters Wasser als Krafteinheit wählen, denn diese Kraft ist an verschiedenen Orten nicht dieselbe. Aehnliches gilt von der Gaußischen Einheit für die erdmagnetische Kraft im Gegensatze zu einer früher gebräuchlichen, als die man die erdmagnetische Kraft in London gewählt hatte.

Während diese eine mit der Zeit veränderliche Größe ist, ist die Gaußische Einheit für erdmagnetische Kräfte von Zeit und Ort der Beobachtung unabhängig, denn sie ist jene Intensität eines magnetischen Feldes, die auf die Quantitätseinheit des Magnetismus eine Kraft vom Betrage der soeben angegebenen Gaußischen Krafteinheit ausübt, wobei als Quantitätseinheit des Magnetismus jene (in einem Punkte angenommene) magnetische Quantität gilt, die auf eine gleich große im Abstande eines Millimeters befindliche mit der Gaußischen Krafteinheit einwirkt. Diese Gaußische Einheit für magnetische Feldintensitäten ist ebensowohl eine absolute Einheit, wie die angeführten Gaußischen Einheiten für Kräfte und für magnetische Quantitäten [2]).

In ähnlicher Weise, wie Gauß für die magnetischen Größen, hat Wilhelm Weber mit Benutzung der Gaußischen Einheiten auch für die electrischen Größen absolute Maßeinheiten eingeführt. In der That sind die gegenwärtig in der Electrotechnik gebräuchlichen electrischen Maße im Wesentlichen nichts anderes als die bereits von W. Weber aufgestellten und allen

---

zurückgelegte Weglänge und t die seit Beginn der Bewegung abgelaufene Zeit bedeuten. (Waltenhofen, Grundriß der mechanischen Physik, S. 50 bis 52.)

[1]) Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. Gauß' Werke, Göttingen 1867, Bd. V, S. 81.

[2]) Vergl. F. Kohlrausch, Lehrbuch der practischen Physik (1901), S. 541. — G. Ferraris, Wissenschaftliche Grundlagen der Electrotechnik (1901), S. 355.

Physikern schon seit Decennien geläufigen Maße; man hat nur für die Praxis bequemere Vielfache (z. B. die 10fache Weber'sche Stromeinheit, die 10^{10}fache Weber'sche Widerstandseinheit und die 10^{11}fache Weber'sche Spannungseinheit) ausgewählt und dafür andere Namen (Ampère, Ohm, Volt) eingeführt. Von absoluten Maßeinheiten anderer Art wird später (§. 7) die Rede sein.

5 **Abgeleitete Maße.** Die Gaußische Krafteinheit hat, wie aus dem Schlußsatze des §. 3 erhellt, die Eigenschaft, daß sie durch die Grundmaße der Mechanik, nämlich durch die Einheiten der Masse, der Zeit und der Länge völlig bestimmt ist, sobald man überhaupt den Begriff einer Kraft im Sinne der Gleichung

$$p = Const.\ m\,\frac{dv}{dt} = Const.\ m\,\frac{d^2s}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ 1)$$

mathematisch definirt hat, oder vielmehr im Sinne der Gleichung

$$p = m\,\frac{dv}{dt} = m\,\frac{d^2s}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ 2)\ ^{1}).$$

indem man die Krafteinheit so wählt, daß $Const. = 1$ ist; denn es bedeutet m eine Masse, d^2s eine Länge und dt eine Zeit, und ist sonach, sobald die Einheiten dieser Größen gewählt sind, auch die Einheit von p, nämlich die Krafteinheit, festgesetzt. Dasselbe gilt auch von den beiden anderen Gaußischen Einheiten, nämlich für magnetische Quantitäten und für erdmagnetische Kräfte, deren Definitionen wir im §. 4 bereits angeführt haben.

Aus diesem Grunde nennt man die absoluten Maße auch abgeleitete Maße[2]), indem man darunter solche versteht, die nach der zu Grunde gelegten Definition der zu messenden Größenart auf die oben genannten Grundmaße der Mechanik zurückgeführt worden sind.

Bei der Ableitung der Krafteinheit aus den Grundmaßen der Mechanik ist die in der Gleichung $p = m\,\frac{d^2s}{dt^2}$ ausgedrückte Beziehung zwischen den genannten Größen zur Aufstellung der Definition der Krafteinheit benutzt worden.

---

[1]) Nimmt man nämlich jene Kraft $p = 1$ an, die der Masse $m = 1$ die Beschleunigung $\frac{d^2s}{dt^2} = 1$ (Geschwindigkeitszuwachs in einer Zeiteinheit = 1) ertheilt, so ist allgemein $p = m\,\frac{d^2s}{dt^2}$ der Ausdruck für die Intensität einer Kraft. Hier bedeutet v die augenblickliche Geschwindigkeit des Beweglichen, s die zurückgelegte Weglänge und t die Zeit seit Beginn der Bewegung. Es ist nämlich $v = \frac{ds}{dt}$ und somit die Beschleunigung $= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$. Siehe §. 3, Anmerkung.

[2]) F. Kohlrausch, Lehrbuch der practischen Physik (1901), S. 540.

Den Definitionen der magnetischen und electrischen Quantitätseinheiten liegt das Coulomb'sche Gesetz zu Grunde, daß für die Kraft p der Wechselwirkung zwischen zwei electrischen (oder magnetischen) Quantitäten μ und μ', die in zwei im Abstande r von einander befindlichen Punkten concentrirt sind, die dem Ausdrucke des Gravitationsgesetzes analoge Gleichung

$$p = Const. \frac{\mu\mu'}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Geltung hat. Denkt man sich nämlich die Einheit von μ und μ' so gewählt, daß $Const. = 1$, also

$$p = \frac{\mu\mu'}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

wird, so heißt dies so viel, als jene Electricitätsmenge (oder Menge von Magnetismus) als Quantitätseinheit annehmen, die auf eine ebensolche gleich große, im Abstande der Längeneinheit ($r = 1$) befindliche, eine Wirkung vom Betrage der Krafteinheit ($p = 1$) ausübt.

Man könnte, um dies noch deutlicher zu machen, in der Gleichung 4) $\mu = \mu'$ setzen und dann schreiben

$$\mu = r\sqrt{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

wobei dann p die zwischen zwei gleichen, im Abstande r befindlichen Mengen wirksame Kraft ist. Soll diese $= 1$ werden für $r = 1$, so setzt dies voraus, daß $\mu = 1$ sei, entsprechend der gegebenen Definition der Mengeneinheit.

So beruht also die Ableitung der electrischen und magnetischen Quantitätseinheiten aus den Grundmaßen der Mechanik ebenfalls auf einer physicalischen Beziehung zwischen diesen Größen.

Es können aber auch geometrische oder kinematische Beziehungen sein, die solchen Ableitungen zu Grunde liegen [1]).

Dies gilt z. B. von den schon längst gebräuchlichen abgeleiteten (absoluten) Maßen für Flächen und Rauminhalte einerseits und für Geschwindigkeiten anderseits, denen die geometrischen Beziehungen $f = a^2$, $k = a^3$ und die kinematische Beziehung $v = \frac{s}{t}$ zu Grunde liegen, wobei f den Flächenraum des über der Länge a beschriebenen Quadrates, k den Körperraum des entsprechenden Würfels und v die Geschwindigkeit bedeutet, die der Zurücklegung des Weges s in der Zeit t entspricht. Diese Gleichungen setzen voraus, daß man das Quadrat der Längeneinheit als Flächeneinheit, den Würfel der Längeneinheit als Volumseinheit, und jene Geschwindigkeit als Geschwindigkeitseinheit betrachte, bei der in der Zeiteinheit die Längeneinheit zurückgelegt wird. Bei jeder anderen Wahl der Einheiten für f, k und v müßten die drei vorstehenden

[1]) F. Kohlrausch, Lehrbuch der practischen Physik (1901), Seite 540.

Gleichungen je eine von der Wahl der Einheiten abhängige Constante als Proportionalitätsfactor $\left(f = Const.\ a^2,\ k = Const.\ a^3,\ v = Const.\ \frac{s}{t}\right)$ enthalten. Man pflegt die Einheit einer Größenart stets so zu wählen, daß der von der Wahl der Einheiten abhängige Proportionalitätsfactor in der zur Ableitung des Maßes benutzten Gleichung = 1 wird[1]).

Wir werden auf eine allgemeinere Besprechung der Beziehungen, die bei der Ableitung physicalischer Maße aus den Grundmaßen der Mechanik in Betracht kommen, später (§. 8) eingehen.

6 **Zusammenhang zwischen den Grundmaßen. Masseneinheit.** Bei den metrischen absoluten Maßsystemen (siehe §. 10) besteht zwischen der Masseneinheit und der Längeneinheit der Zusammenhang, daß die Masse einer Volumseinheit Wasser von der größten Dichte (4° C.) als Masseneinheit gilt; es ist also die Masseneinheit unter der Annahme einer normalen Dichte auf die Volumseinheit und somit auf die Längeneinheit gegründet. Hingegen steht die Zeiteinheit (Secunde) in keinem Zusammenhange mit den vorgenannten Einheiten für Länge und Masse und auch in keinem Zusammenhange mit der angenommenen normalen Dichte.

Wir wollen hierüber nur gelegentlich bemerken, daß dies nicht die einzig mögliche Art ist, Maßsysteme aufzubauen. Man könnte z. B. auch, von einer angenommenen Einheit der Dichten ausgehend, Zeiteinheit und Längeneinheit daraus ableiten[2]), oder auch noch andere Annahmen und Beziehungen zur Aufstellung von Grundmaßen benutzen.

---

[1]) Wie aus dem nächstfolgenden Paragraphen hervorgeht, wird die Einheit wägbarer Massen in der Regel nicht (wie bei den electrischen und magnetischen „Quantitäten") als jene Masse definirt, die auf eine gleich große, im Abstande der Längeneinheit befindliche mit der Krafteinheit einwirkt. Deßhalb kann bei Anwendung der Gleichung 3 auf wägbare Massen die Proportionalitätsconstante nicht gleich Eins sein. Siehe §. 17. Ueber eine andere Annahme siehe II. Theil §. 56.

[2]) Diese Möglichkeit mag folgende Betrachtung erläutern. Man denke sich (nach Maxwell) im Weltraume schwebend eine homogene Kugel von der normalen Dichte (z. B. des Wassers) und planetarisch umkreist von einer auf ihrer Oberfläche befindlichen sehr kleinen Kugel. Die für diesen Fall berechnete Umlaufszeit erscheint unabhängig vom Radius und könnte also als ein bloß von der angenommenen Dichteneinheit abhängiges Zeitmaß dienen. Würde man dann allenfalls noch den während dieser Zeit vom Lichte zurückgelegten Weg als Längeneinheit wählen, so hätte man auch das Längenmaß auf die Dichteneinheit gegründet. (Vergl. Helmholtz in Wiedemann's Ann., Bd. 17 (1882), S. 44 und W. Thomson, Centralbl. f. Electrotechnik, Bd. 6 (1884), S. 657.)

Diese Einheiten für Zeit und Länge wären allerdings unbequem groß, nämlich 12979 Secunden und 3892 Millionen Kilometer, wenn man in der Rechnung die Dichte der Erde = 5,6 annimmt. Näheres hierüber im II. Theile §. 56.

Urmaße und Copien. Anderseits ist noch bemerkenswerth, daß es auch 7
Maßeinheiten gibt, die man zwar insofern absolute Einheiten nennen könnte, als sie von Zeit und Ort der Beobachtung unabhängig sind, die jedoch nicht aus den Grundmaßen der Mechanik abgeleitet werden können. Von dieser Art sind z. B. die Siemens'sche Widerstandseinheit und alle Größeneinheiten, die sich durch ein aufzubewahrendes Urmaß (Etalon) darstellen und durch Copien desselben allgemein zugänglich machen lassen. Manche Größenarten (z. B. electrische, magnetische, calorische Quantitäten) gestatten jedoch die Darstellung eines solchen Urmaßes nicht, und bei diesen ist man auf die Aufstellung abgeleiteter Maße angewiesen.

Dimensionsformeln. Die bei der Ableitung eines Maßes aus seinen 8
Grundmaßen benutzten Beziehungen (z. B. Formel 2, 5 u. a.) begründen die Möglichkeit, Gleichungen aufzustellen, aus denen sofort ersichtlich ist, wie die abgeleitete Größeneinheit sich ändert, wenn für die Grundmaße, von denen sie abhängt, andere Einheiten gewählt werden.

Um diesen Einfluß der Grundmaße (Längeneinheit, Masseneinheit, Zeiteinheit) auf das abgeleitete Maß (z. B. Krafteinheit, Electricitätsmengen-Einheit u. s. w.) übersichtlich zu machen, hat man eine symbolische Darstellung dieses Zusammenhanges eingeführt, die wir an einem Beispiele erläutern wollen.

Für eine der beiden gleichen electrischen oder magnetischen Mengen, die (vermöge des Coulomb'schen Gesetzes, Formel 4) in dem Abstande r die Kraft p auf einander ausüben, haben wir (Formel 5) den Ausdruck gefunden $\mu = r\sqrt{p}$. Setzt man für p den Ausdruck $m\frac{d^2s}{dt^2}$ aus Formel 2 ein, so erhält man

$$\mu = r\sqrt{m\frac{d^2s}{dt^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

In diesem Ausdrucke kommen zwei Längen, nämlich r und d^2s, ferner eine Masse, m, und eine Zeit, dt, vor. Bei der Beurtheilung des Einflusses, den eine Aenderung der Längeneinheit auf den Zahlenwerth der electrischen oder magnetischen Menge μ ausübt, kommt es aber nicht mehr darauf an, zu unterscheiden, daß r den Abstand der beiden in Wechselwirkung stehenden Mengen μ, hingegen d^2s ein Wegdifferentiale der zweiten Ordnung bedeutet. Man setzt daher in die symbolische Formel sowohl für r als auch für d^2s das Längensymbol l ein. Die im Ausdrucke vorkommende Zeit, dt, markirt man mit dem Symbol t, ohne darauf zu achten, daß dt ein Zeitdifferentiale ist, weil dies ja für das Verhältniß der Werthänderung in Folge einer Aenderung der Zeiteinheit ebenfalls nicht in Betracht kommt. Als Symbol für eine Masse gebraucht man die Bezeichnung m. Mit Einführung dieser Bezeichnungen erhält

man rechts vom Gleichheitszeichen den symbolischen Ausdruck $l\sqrt{m\frac{l}{t^2}}$ oder

$$l^{3/2}\, m^{1/2}\, t^{-1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

Links vom Gleichheitszeichen dürfen wir aber jetzt nicht mehr μ setzen, denn die physicalische Bedeutung des Ausdruckes 6 ist durch die Einführung einer die physicalische oder mathematische Bedeutung der in der vorliegenden Function vorkommenden Größen nicht beachtenden, sondern sie nur nach Categorien classificirenden symbolischen Bezeichnung vollständig verloren gegangen. Der Ausdruck 7 läßt, im Gegensatze zu dem Ausdrucke 6, auch nicht einmal erkennen, daß er einerseits mit einer Entfernung und anderseits mit einer Kraft zusammenhängt, sondern ist lediglich eine abstracte Zahl, eine Verhältnißzahl. Der Ausdruck 7 zeigt nämlich nur an, in welchem Verhältnisse die Einheit für electrische oder magnetische Mengen und in Folge dessen auch der einer bestimmten electrischen oder magnetischen Menge μ zukommende Zahlenwerth sich ändert, wenn man für Länge, Masse und Zeit andere Einheiten wählt. Wir wollen deßhalb, um diese veränderte Bedeutung des Ausdruckes 7 hervorzuheben, links vom Gleichheitszeichen statt μ das Symbol (μ) setzen und dieses die „Dimension" von μ, also die „Dimension" einer electrischen oder magnetischen Menge nennen, und also schreiben

$$(\mu) = l^{3/2}\, m^{1/2}\, t^{-1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

Formeln dieser Art, die zuerst von Maxwell[1]) eingeführt wurden, heißen Dimensionsformeln und sind im Allgemeinen von der Gestalt[2]):

$$(G) = l^a\, m^b\, t^c \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 9)$$

wobei l, m und t die bereits angegebene Bedeutung haben und die Exponenten a, b, c positive oder negative ganze oder gebrochene Zahlen sein können. Den ganzen mit (G) bezeichneten Ausdruck nennt man die Dimension einer Größe G, deren Zahlenwerth sich natürlich ändert, wenn man für Länge, Masse und Zeit andere Einheiten wählt, wodurch die Zahlenwerthe l, m und t geändert werden. Wir können auch sagen, die Dimensionsformel stellt die Verwandlungszahl für ein abgeleitetes Maß dar als ein Product von Potenzen der Verwandlungszahlen der Grundmaße[3]).

Eine Dimensionsformel (8) hat keine theoretische Bedeutung mehr, wie die Formel (5 oder 6), aus der sie abgeleitet worden ist, sondern nur die

---

[1]) Nach W. Thomson wäre die Begründung dieser Formeln auf Fourier zurückzuführen. Siehe Centralblatt für Electrotechnik, Bd. 6, S. 657.

[2]) Wenn die Größe, deren Verwandlungszahl dargestellt wird, links vom Gleichheitszeichen nicht mit einem einzelnen Buchstaben, wie bisher, sondern mit Worten bezeichnet ist, werden wir die Klammern fortlassen und den Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen einklammern, z. B. Mechanisches Wärmeäquivalent $= [l^2\, t^{-2}]$.

[3]) Nach einer Bemerkung von Dr. J. Sahulka.

soeben angegebene arithmetische. Wollte man einer Dimensionsformel eine theoretische Bedeutung beilegen, so könnte dies zu Irrungen führen. So könnte z. B. die Formel 8 zur Annahme verleiten, daß eine Electricitätsmenge vermöge ihrer Definition der Potenz $^3/_2$ irgend einer Länge proportional sei, was, wie aus 3, 4, 5 und 6 ersichtlich, keineswegs der Fall ist. Auch können, wie wir sehen werden, die verschiedenartigsten Größen von gleicher „Dimension" sein [1]).

Anwendung der Dimensionsformeln. Um den Gebrauch dieser 9
Formeln zu erläutern, wollen wir zuerst ein Zahlenbeispiel in Betracht ziehen.

Nehmen wir das eine Mal Centimeter, Gramm [2]) und Secunde, und das andere Mal Millimeter, Milligramm [3]) und Secunde als Grundmaße an und untersuchen wir, wie sich die einer bestimmten Electricitätsmenge entsprechenden Zahlenwerthe in beiden Fällen zu einander verhalten.

Im ersten Falle ist jene Electricitätsmenge $= 1$, die auf eine gleich große, im Abstande eines Centimeters befindliche eine Kraft ausübt, die der Masse eines Grammes in jeder Secunde einen Geschwindigkeitszuwachs von einem Centimeter ertheilt, und im zweiten Falle jene, die auf eine gleich große, im Abstande eines Millimeters befindliche mit einer Kraft wirkt, die der Masse eines Milligrammes in jeder Secunde den Geschwindigkeitszuwachs eines Millimeters beibringt.

Indem wir beim Längenmaße vom Centimeter auf das 10mal kleinere Millimeter übergehen, werden alle Längenwerthe verzehnfacht, was wir in der Formel 8 für die Verwandlungszahl einer Electricitätsmenge damit ausdrücken können, daß wir die Verwandlungszahl l für Längen $= 10$ setzen. Indem wir ferner bei der Masseneinheit vom Gramm auf das 1000mal kleinere Milligramm übergehen, werden alle Massenwerthe vertausendfacht. Wir setzen also in der Formel 8 die Verwandlungszahl m für Massen $= 1000$. Da wir endlich die Zeiteinheit (Secunde) ungeändert lassen, setzen wir die Verwandlungszahl t für Zeiten $= 1$. Wir erhalten demnach aus Formel 8

$$(\mu) = 10^{3/2} . 1000^{1/2} . 1^{-1} = 1000 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

für die Verwandlungszahl der Electricitätsmengen, d. h. eine bestimmte Electricitätsmenge wird, nach der letzteren Einheit gemessen, einen tausendmal größeren Zahlenwerth haben, als nach der ersteren Einheit gemessen, woraus folgt, daß die mm-mgr-sec-Einheit für Electricitätsmengen 1000mal kleiner ist, als die cm-gr-sec-Einheit.

---

[1]) Z. B. electrostatische Capacität und Coëfficient der Selbstinduction (§§. 34 und 104).

[2]) Nämlich die Masse eines Grammgewichtes oder eines Cubikcentimeters Wasser größter Dichte (§. 6).

[3]) Nämlich die Masse eines Milligrammgewichtes oder eines Cubikmillimeters Wasser größter Dichte (§. 6).

Wir wollen noch ein Zahlenbeispiel anführen.

Aus der Formel 2 für eine Kraft ergibt sich nach den im §. 8 gegebenen Erläuterungen leicht die Dimensionsformel

$$(p) = m l t^{-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

in der also (p) die Verwandlungszahl für Kräfte vorstellt, während m, l und t, wie bisher, die Verwandlungszahlen für Massen-, Längen- und Zeitwerthe bedeuten.

Wir nehmen zunächst wieder Centimeter, Gramm und Secunde als Grundmaße an und ein anderes Mal Millimeter, Tonne und Minute.

Im ersten Falle gilt als Krafteinheit eine Kraft, die der Masse eines Grammes in der Secunde einen Geschwindigkeitszuwachs vom Betrage eines Centimeters beibringt, im zweiten Falle hingegen jene Kraft, durch deren Einwirkung die Masse einer Tonne (d. i. 1000 kg oder 10^6 gr) binnen einer Minute den Geschwindigkeitszuwachs von einem Millimeter erlangt.

Indem wir bei der Masseneinheit vom Gramm auf die 10^6 mal größere Tonne übergehen, werden alle Massenwerthe 10^6 mal kleiner. Wir haben also in Formel 11 für die Verwandlungszahl der Massenwerthe $m = \frac{1}{10^6}$ einzusetzen.

Indem wir ferner beim Längenmaße vom Centimeter auf das 10 mal kleinere Millimeter übergehen, werden alle Längenwerthe 10 mal größer. Wir setzen also in Formel 11 die Verwandlungszahl $l = 10$.

Indem wir endlich als Zeiteinheit anstatt der Secunde die 60 mal größere Minute wählen, werden alle Zeitwerthe 60 mal kleiner, weßhalb wir die Verwandlungszahl t für Zeitwerthe $= \frac{1}{60}$ setzen müssen.

Wir erhalten demnach aus Formel 11:

$$(p) = \frac{1}{10^6} \cdot 10 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^{-2} = \frac{36000}{10^6} = 0{,}036 \doteq \frac{1}{28} \quad . \quad . \quad 12^1)$$

als Verwandlungszahl für Kräfte. Diese Krafteinheit muß also 28 mal größer sein als jene, der wir später den Namen Dyn beilegen werden (§. 14).

Diese Betrachtungen lassen sich mit Hülfe der Formel 9 leicht verallgemeinern.

Nehmen wir wieder an, wir hätten zunächst Centimeter, Gramm und Secunde als Grundmaße gewählt, also jenes Maßsystem, das man kurz das C-G-S-System zu nennen pflegt, und würden dann auf ein anderes Maßsystem übergehen, dessen Längeneinheit p Centimeter, dessen Masseneinheit

[1]) Mit dem Zeichen $\doteq$ bezeichnen wir stets eine annähernde Gleichheit.

q Gramme und dessen Zeiteinheit r Secunden beträgt. Dadurch werden alle Längenwerthe $p$mal kleiner, alle Massenwerthe $q$mal kleiner und alle Zeitwerthe $r$mal kleiner, weßhalb wir in der Gleichung 9 die Zahlen $l = \frac{1}{p}$, $m = \frac{1}{q}$ und $t = \frac{1}{r}$ als Verwandlungszahlen für die genannten Größenwerthe einzusetzen haben und als Verwandlungszahl für den Werth der Größe G erhalten

$$(G) = \left(\frac{1}{p}\right)^a \left(\frac{1}{q}\right)^b \left(\frac{1}{r}\right)^c = \frac{1}{p^a\, q^b\, r^c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

Wenn sich also bei der Messung einer Größe mit der C-G-S-Einheit der Zahlenwerth n ergeben hat und wir messen dieselbe Größe ein anderes Mal mit der (der Formel 13 zu Grunde liegenden) neuen Einheit, so ergibt sich für diese Größe ein Zahlenwerth

$$N = \frac{n}{p^a\, q^b\, r^c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

Nennen wir die neue Einheit die pC-qG-rS-Einheit, so gilt also die Beziehung

$$p\text{C-}q\text{G-}r\text{S-Einheit} = p^a\, q^b\, r^c \text{ C-G-S-Einheiten} \quad . \quad . \quad . \quad 15)$$

Das C-G-S-System. Nach den Beschlüssen der British Association 10
und der Pariser Congresse (1881 und 1884) sind Centimeter, Gramm (das heißt: Masse des Grammgewichtes) und Secunde (mittlerer Sonnenzeit) als Grundmaße eingeführt worden, weßhalb das im vorigen Paragraphen bereits definirte C-G-S-System auch das System der Congreß-Einheiten genannt wird.

Um ersichtlich zu machen, daß eine Größe mit der Einheit dieses Systems gemessen worden ist, pflegt man in den der Größenart entsprechenden Dimensionsausdruck C für l, G für m und S für t einzusetzen, was andeuten soll, daß Centimeter, Gramm und Secunde als Grundmaße angenommen sind. Hätte man z. B. bei der Messung einer Electricitätsmenge gefunden, daß sie 300000 electrostatische[1]) Einheiten des C-G-S-Systemes beträgt, so wäre dies mit Rücksicht auf den entsprechenden Dimensionsausdruck (Formel 8) so auszudrücken: Electricitätsmenge $= 300000\ (C^{3/2} G^{1/2} S^{-1})$.

Vor der Einführung des C-G-S-Systems war das von Gauß und Weber begründete Maßsystem mit den Grundmaßen Millimeter, Milligramm (das heißt: Masse des Milligrammgewichtes) und Secunde in der Wissenschaft gebräuchlich. Man bezeichnet es als das Mm-Mg-S-System und schreibt einen

[1]) Es gibt nämlich, wie wir später sehen werden, auch eine electromagnetische Einheit für Electricitätsmengen.

auf dieſes Syſtem bezüglichen Dimenſionsausdruck in der Form $Mm^a\,Mg^b\,S^c$, alſo z. B. das Symbol einer mit der Einheit dieſes Syſtems gemeſſenen Electricitätsmenge in der Form $Mm^{3/2}\,Mg^{1/2}\,S^{-1}$.

Da dieſen beiden Syſtemen die Zeiteinheit (Secunde) gemeinſchaftlich iſt, ſo findet man nach Formel 14 den auf das Mm-Mg-S-Syſtem bezüglichen Zahlenwerth N einer gemeſſenen Größe aus dem auf das C-G-S-Syſtem bezüglichen Zahlenwerthe n auf folgende Weiſe

$$N = \frac{n}{\left(\frac{1}{10}\right)^a \left(\frac{1}{1000}\right)^b} = 10^{a+3b} n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

Zur Umrechnung von electroſtatiſchen Electricitätsmengen oder magnetiſchen Quantitäten erhält man alſo wegen $a = 3/2$ und $b = 1/2$ die Formel:

$$N = 1000\,n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17)$$

alſo beiſpielsweiſe:

$$300000\ (C^{3/2}\,G^{1/2}\,S^{-1}) = 300000000\ (Mm^{3/2}\,Mg^{1/2}\,S^{-1}).$$

Um eine Größeneinheit des einen oder des anderen Syſtems zu definiren, bedient man ſich der Schreibweiſe:

$$C\text{-}G\text{-}S\text{-Einheit} = 1\ (C^a\,G^b\,S^c) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18)$$

$$Mm\text{-}Mg\text{-}S\text{-Einheit} = 1(Mm^a\,Mg^b\,S^c) \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

Es bedeutet alſo z. B. das Symbol $1\ (Mm\,Mg\,S^{-2})$ die in den §§. 4 und 9 bereits definirte Gaußiſche Krafteinheit, hingegen $1\ (C\,G\,S^{-2})$ die Krafteinheit, die wir (§. 9) eine Dyne oder ein Dyn genannt haben.

11 **Practiſche Einheiten.** Bei manchen Größenarten zeigt es ſich, daß die C-G-S-Einheiten, wie ſie ſich aus dem Ausdrucke der Formel 18 ergeben, für den practiſchen Gebrauch unbequem klein oder unbequem groß ſein würden.

Man pflegt in ſolchen Fällen ſogenannte practiſche Einheiten einzuführen, die ſich durch Multiplication oder Diviſion der betreffenden C-G-S-Einheiten mit einer Potenz von 10 ergeben, ſo daß

$$\text{Practiſche } C\text{-}G\text{-}S\text{-Einheit} = 10^m\ (C^a\,G^b\,S^c) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20)$$

wobei m eine poſitive oder negative ganze Zahl iſt, deren Werth ſich aus Folgendem ergibt.

Man erhält die gangbaren practiſchen Einheiten des C-G-S-Syſtems, die wir ſpäter unter den Namen Joule, Watt, Volt, Ampère u. ſ. w. kennen lernen werden, wenn man mit Beibehaltung der Secunde als Zeiteinheit die Länge des Erdquadranten $Q = 10^9$ cm oder 10^9 C als Längeneinheit und eine Maſſe $\gamma = 10^{-11}$ gr oder 10^{-11} G als Maſſeneinheit in die allgemeine

Formel 18 einführt, wodurch man für die practische C-G-S-Einheit den Ausdruck

$$Q^a \gamma^b S^c = 10^{9a} . C^a . 10^{-11b} G^b . S^c = 10^{9a-11b} (C^a G^b S^c)$$

erhält. Der Werth von m in der vorstehenden Formel 20 ist demnach allgemein $m = 10^{9a-11b}$.

Vielfache und Unterabtheilungen von solchen Einheiten werden durch Multiplication oder Division mit 10^6 hergestellt und durch Vorsetzen der Bestimmungsworte Mega oder Micro vor den Namen der Einheit ausgedrückt [1]).

Diese Ausdrucksweise wird aber nicht nur bei den soeben besprochenen „practischen" Einheiten, sondern auch bei den ursprünglichen C-G-S-Einheiten angewendet. So nennt man z. B. die Kraft, die einer Million von Dynen gleichkommt, nämlich 10^6 (CGS^{-2}), ein Megadyn; und die Kraft, die dem millionten Theile von einem Dyn gleich ist, nämlich 10^{-6} (CGS^{-2}), ein Microdyn.

Wir gehen nun daran, die für den Electrotechniker wichtigen Maße und Einheiten, mit Einschluß der dabei in Betracht kommenden mechanischen Maße, eingehend zu besprechen und zwar in der folgenden Eintheilung und Reihenfolge: 1. die mechanischen, 2. die magnetischen, 3. die electrostatischen und 4. die electromagnetischen Maße.

---

[1]) Ueber das hier besprochene practische Maßsystem siehe Pfaundler, Lehrbuch der Physik, Bd. 3, S. 1030 und Ferraris, Wissenschaftliche Grundlagen der Electrotechnik, S. 354.

1.

Mechanische Maße.

12 **Längeneinheit, Zeiteinheit, Masseneinheit.** Als Längenmaß dient uns das Meter (griechisch *μέτρον* = Maß) (§. 2, Anmerkung) mit seinen Unterabtheilungen [1]) und Vielfachen und zwar nach §. 10 in der Regel das Centimeter (cm) und folglich als Volumseinheit (§. 5) in der Regel das Cubikcentimeter (cm^3). Auch die Länge des Erdquadranten $= 10^9$ cm wird manchmal als Längeneinheit eingeführt [2]).

Als Zeiteinheit ist die Secunde mittlerer Sonnenzeit gebräuchlich, wobei wir bemerken, daß ein Sterntag (Umdrehungszeit der Erde) 86164,09 Secunden mittlerer Sonnenzeit ausmacht, also um 3 Minuten und 55,91 Secunden mittlerer Sonnenzeit kürzer ist als der mittlere Sonnentag unserer bürgerlichen Zeitrechnung, der $24 \times 60 \times 60 = 86400$ Secunden mittlerer Sonnenzeit hat.

Als Masseneinheit nehmen wir eine Masse an, die die gleiche Trägheit, folglich auch das gleiche Gewicht [3]) hat, wie die Volumseinheit Wasser größter Dichte [4]). Da wir nun in der Regel das Centimeter als Längeneinheit

---

[1]) Von den Unterabtheilungen möge hier noch der unter dem Namen Micron bekannte tausendste Theil eines Millimeters (bezeichnet mit μ) besonders erwähnt werden. Den tausendsten Theil des Microns (bezeichnet mit $\mu\mu$) wollen wir Millimicron nennen.

[2]) Siehe §. 11.

[3]) Siehe die Anmerkung zu §. 1.

[4]) Dabei ist destillirtes Wasser von der Temperatur 4° C., bei der das Wasser seine größte Dichte hat, vorausgesetzt, und zwar unter dem Drucke einer Atmosphäre, der bei der Schwere im Meeres-Niveau der mittleren geographischen Breite (siehe §. 15) dem Normal-Barometerstande von 76 cm entspricht. Diese Schwere wurde bei dem Physiker-Congresse in Paris (1900) als der Acceleration von 9,80692 m entsprechend angenommen und der unter diesen Voraussetzungen für 1 cm^2 sich ergebende Druck eine barie genannt. Wir bemerken übrigens, daß hier kleine Druckänderungen kaum in Betracht kommen, da das Wasser bei einer Druckzunahme um eine ganze Atmosphäre nur um ungefähr den zwanzigtausendsten Theil seines Volumens zusammengedrückt wird. (Siehe meinen Grundriß der mechanischen Physik, S. 134.)

benutzen, so werden wir in der Regel die Masse eines Cubikcentimeters Wasser größter Dichte, also die Masse eines Grammgewichtsstückes [1]) als Masseneinheit ansehen. Wir nennen diese Masseneinheit ein Gramm (gr).

Von den Unterabtheilungen haben wir das Milligramm (mgr) als die Masseneinheit des Gaußischen Systems in den §§. 4 und 10 bereits erwähnt.

Von den Vielfachen werden am häufigsten gebraucht: das Kilogramm (kg) und die Tonne (t), deren Masse (10^3 kg $= 10^6$ gr) der Masse eines Cubikmeters (1000 Liter) reinen Wassers von der größten Dichte gleichkommt [2]).

Im nächsten Paragraphen werden wir auch noch von einer Masseneinheit Gebrauch machen, die der Masse eines Cubikkilometers reinen Wassers größter Dichte entspricht, also tausend Millionen Tonnen (10^9 t) beträgt, und die wir die kilometrische Masseneinheit nennen wollen.

Das im bürgerlichen Verkehre unter dem Namen „Deka" (d. h. Dekagramm $=$ 10 gr) gangbare Handelsgewicht ist in der Wissenschaft und Technik nicht üblich.

Die angeführten Benennungen (Gramm, Kilogramme u. s. w.) der definirten Massen dienen auch zur Bezeichnung ihrer Gewichte, unter Voraussetzung des im §. 15 angegebenen normalen Werthes der Acceleration der Schwere (9,806652 m).

Dabei ist zu beachten, daß es sich bei unsern Wägungen in den meisten Fällen nur um Massenbestimmungen handelt, z. B. beim Abwägen einer nach der Stoffmenge bewertheten Waare, wobei wir nicht nach der Kraft fragen, mit der diese Stoffmenge zur Erde gravitirt. — Anders verhält es sich, wenn z. B. eine magnetische oder electrische Anziehung oder Abstoßung mit Hülfe einer Waage ermittelt wird. Hier kommt es nicht auf die Massen der Gewichtsstücke an, die zum Aequilibriren der besagten Anziehungen oder Abstoßungen gedient haben oder die, falls dabei eine Federwaage in Verwendung war [3]), bei deren Aichung benutzt worden sind, sondern auf die Zugkräfte, die diese Gewichtsstücke bei der Acceleration der Schwere am Beobachtungsorte ausüben.

Weiteres hierüber, insbesondere auch über die Unabhängigkeit oder Abhängigkeit der Hebel- oder Federwaagen von der Acceleration der Schwere folgt im §. 16.

---

[1]) Als Gewichtsnormalien (Urmaße) sind übrigens nicht Grammgewichtsstücke, sondern Kilogrammgewichtsstücke üblich, darstellend die Masse eines Cubikdecimeters (Liters) Wasser größter Dichte. Weiteres im II. Theile, §. 57.

[2]) Die englische Tonne (tun = großes Faß, häufig auch ton geschrieben) beträgt 1016,04 kg, nämlich 20 Hundredweight (20 Cwt) von je 112 Pfund Avoir-du-poids, d. i. 2240 $\times$ 0,45359 kg. (In Everett, Units and physical constants steht dafür 1,01605 $\times$ 10^6 gr.) Vergl. Emsmann, Physicalisches Handwörterbuch.

[3]) Etwa bei der Ermittelung der Tragkraft eines Magneten.

13 **Geschwindigkeit, Beschleunigung.** Die schon in der Anmerkung zu §. 3 erwähnte Formel für eine Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \ldots \quad 21)$$

oder für die im Falle einer gleichförmigen Bewegung constante Geschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} \quad \ldots \quad 22)$$

läßt nach den im §. 8 gegebenen Erläuterungen sofort erkennen, daß die Dimension einer Geschwindigkeit durch den Ausdruck

$$(v) = l t^{-1} \quad \ldots \quad 23)$$

gegeben ist. Demnach erhält man für das C-G-S-System

$$\text{Geschwindigkeitseinheit} = 1\ (\text{CS}^{-1}) \quad \ldots \quad 24)$$

nämlich die Geschwindigkeit von 1 Centimeter pro Secunde.

Demnach wäre z. B. die Geschwindigkeit des Lichtes von rund 300 000 km $= 3{,}10^{10}$ cm in der Secunde in der Form $3 . 10^{10}$ (CS^{-1}) auszudrücken.

Die gleichfalls schon in der Anmerkung zu §. 3 erwähnte Formel für eine Beschleunigung

$$j = \frac{dv}{dt} \quad \ldots \quad 25)$$

oder, mit Rücksicht auf $v = \frac{ds}{dt}$

$$j = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \ldots \quad 26)$$

ergibt (nach §. 8) für die Dimension einer Beschleunigung den Ausdruck

$$(j) = l t^{-2} \quad \ldots \quad 27)$$

Demnach ist für das C-G-S-System die

$$\text{Beschleunigungseinheit} = 1\ (\text{CS}^{-2}) \quad \ldots \quad 28)$$

und z. B. die Beschleunigung der Schwere $g = 981\ \text{CS}^{-2}$.

Der Mond gravitirt gegen die Erde [1]) im Mittel mit der Beschleunigung $0{,}27\ \text{CS}^{-2}$; die Fallbeschleunigung auf dem Monde beträgt $166\ \text{CS}^{-2}$, auf der Sonne $27120\ \text{CS}^{-2}$.

Die Erde gravitirt gegen die Sonne [1]) in der kleinsten und größten Entfernung mit $0{,}61\ \text{CS}^{-2}$ und $0{,}57\ \text{CS}^{-2}$.

---

[1]) Bei der Berechnung dieser Beschleunigungen und der im §. 14 mitgetheilten Anziehungen zwischen den genannten Himmelskörpern habe ich die im „astronomischen Kalender" der Wiener Sternwarte und in den von Dr. Edmund Weiß neu bearbeiteten „Wundern des Himmels" von Littrow enthaltenen Angaben über Massen und Entfernungen benutzt.

Kraft. Als Krafteinheit dient uns eine constante Kraft, die der Massen- 14
einheit in der Zeiteinheit eine Beschleunigung vom Betrage der Längeneinheit ertheilt. Da wir nun in der Regel das Gramm als Masseneinheit, das Centimeter als Längeneinheit und die Secunde als Zeiteinheit [entsprechend dem C-G-S-System (§. 10)] benutzen, so wird uns als Krafteinheit in der Regel eine constante Kraft dienen, die der Masse eines Grammes in einer Secunde die Beschleunigung von einem Centimeter ertheilt. Diese Krafteinheit des C-G-S-Systemes hat man eine Dyne oder auch ein Dyn (nach dem griechischen Worte δύναμις, die Kraft) genannt.

Da nun (nach §. 9, Formel 11) die Dimensionsformel für eine Kraft im Allgemeinen

$$(p) = l m t^{-2}$$

ist, so wird die Krafteinheit des C-G-S-Systems im Sinne der Formel 18 des §. 10 in der Form

$$1 \text{ Dyn} = 1\ (\text{CGS}^{-2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 29)$$

auszudrücken sein.

Die Kraft, die wir ein Grammgewicht nennen, ertheilt der Masse eines Grammes binnen einer Secunde bekanntlich die Beschleunigung $g = 981$ cm an einem Orte, wo die Acceleration g der Schwere eben diesen Werth hat. Wir können also unter dieser Voraussetzung annehmen

$$\text{Grammgewicht} = 981 \text{ Dyn} = 981\ (\text{CGS}^{-2}) \quad . \quad . \quad . \quad 30^{1})$$

oder allgemein

$$\text{Grammgewicht} = g \text{ Dyn} = g\ (\text{CGS}^{-2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 31)$$

---

[1]) Wenn wir die Acceleration der Schwere = 981 cm = 9,81 m annehmen, so kommen wir damit sehr nahe dem Werthe, den diese Größe im Niveau des auf der Höhe von St. Cloud bei Paris befindlichen Pavillon de Breteuil (Sitz des Bureau international des poids et mesures) hat, nämlich 9,80991 m.

Nach den Publicationen des genannten Instituts ergibt sich hieraus mit Rücksicht auf die Lage des angegebenen Beobachtungsortes (geographische Breite = 48° 50′, Meereshöhe = 67 m) für das Meeresniveau der mittleren Breite der Werth

$$g = \frac{9{,}80991}{1{,}0003322} = 9{,}806652 \text{ m}.$$

Diese Beschleunigung ist zur Erzielung einer einheitlichen Definition des Gewichtes als Zugkraft als Normal-Beschleunigung der Schwere vorgeschlagen worden und hat in Oesterreich als solche auch gesetzliche Geltung. Demnach wäre die in Formel 30 gegebene Definition genauer

$$\text{Grammgewicht} = 980{,}665 \text{ Dyn} = 980{,}665\ (\text{CGS}^{-2}) \quad . \quad . \quad . \quad 30a)$$

Doch wollen wir in diesem Buche in der Regel die in der Formel 30 gegebene annähernde und in den meisten Fällen auch hinreichend genaue Definition gelten lassen. (Siehe Pfaundler's Lehrbuch der Physik, 9. Auflage, 1. Bd., S. 113 und v. Thaa, das Maß- und Gewichtswesen in Oesterreich, Supplementheft zum 13. Bande der Manz'schen Gesetz-Ausgabe vom Jahre 1890, S. 392 und 396.)

Aus dem Gesagten folgt, daß 1 Dyn den Werth $\frac{1}{g}$ Gramm, also für $g = 981$ den Werth $\frac{1}{981} = 0{,}001019$ Gramm, d. i. etwas mehr als 1 Milligramm hat. Ein Megadyn wäre also etwas mehr als 1 Kilogramm (1019 gr).

Nimmt man anstatt des Centimeters das Decimeter als Längeneinheit an, so wird, der zehnfachen Längeneinheit entsprechend, die Masseneinheit vertausendfacht, denn diese ist dann die Masse eines Cubikdecimeters Wasser größter Dichte, d. i. das Kilogramm. Man kommt dann mit Beibehaltung der Secunde als Zeiteinheit vom C-G-S-System zum D-K-S-System, d. h. zum Decimeter-Kilogramm-Secunden-System. Die Krafteinheit dieses Systems ist nämlich jene Kraft, die der Masse eines Kilogrammes in der Secunde die Beschleunigung von einem Decimeter ertheilt, also eine Kraft, die offenbar 10000mal so groß ist wie 1 Dyn und demnach ein Myriadyn heißen mag, etwas über ein Decagramm (10,19 gr) betragend.

Nimmt man allgemein l Centimeter als Längeneinheit, so wird die Masseneinheit l^3 Gramm und also die Krafteinheit l^4 Dyn sein müssen. Es wird also z. B. dem Meter als Längeneinheit die Tonne als Masseneinheit entsprechen und in dem so gebildeten Meter-Tonnen-Secunden-System (M-T-S-System) eine Krafteinheit von $100^4 = 10^8$ = hundert Millionen Dynen sich ergeben, die man als

$$1 \text{ Hectomegadyn} = 1\,(MTS^{-2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 32)$$

bezeichnen kann. Sie beträgt als Gewicht bei der Acceleration = 981 cm aufgefaßt, 101,9 Kilogramm, also etwas über einen Metercentner.

Bemerkenswerth, wenngleich bis jetzt meines Wissens noch nicht angewendet, ist auch das Maßsystem, das sich ergibt, wenn man das Kilometer als Längeneinheit und somit die Masse eines Cubikkilometers Wasser größter Dichte als Masseneinheit wählt. Ich will dieses System das kilometrische nennen.

Die diesem System entsprechende Krafteinheit, sie mag die kilometrische Krafteinheit heißen, ist die Kraft, die der soeben definirten kilometrischen Masseneinheit binnen einer Secunde die Beschleunigung von einem Kilometer ertheilt [1]).

Beispielsweise will ich anführen, daß die zwischen Erde und Mond wirksame gegenseitige Anziehungskraft bei der mittleren Entfernung der genannten Himmelskörper nach meiner Berechnung in runder Zahl 200000 kilometrische Krafteinheiten beträgt, d. h. der Mond wird von der Erde (und folglich auch die Erde vom Monde) mit einer Kraft angezogen, die hinreichend wäre, der

[1]) Ueber das Verhältniß der hier definirten kilometrischen Krafteinheit zu der von J. Sahulka definirten astronomischen Krafteinheit siehe II. Theil, §. 56.

Masse von 200000 Cubikkilometer Wasser binnen einer Secunde die Beschleunigung von einem Kilometer zu ertheilen. — Die Anziehung zwischen Sonne und Erde beträgt bei der mittleren Entfernung dieser Himmelskörper nach meiner Berechnung in runder Zahl 35000000 kilometrische Krafteinheiten und wäre also hinreichend, einer Wassermasse von rund 35 Millionen Cubikkilometer in der Secunde die Beschleunigung von einem Kilometer zu ertheilen [1]).

Da ein Kilometer 100000 $= 10^5$ Centimeter hat, so ergibt sich aus den der Definition des Hectomegadyn vorausgeschickten Bemerkungen (§. 14, Formel 32) sofort, daß eine kilometrische Masseneinheit $= 10^{15}$, d. i. tausend Billionen Gramm, und eine kilometrische Krafteinheit 10^{20}, d. i. hundert Trillionen Dyn, ist. Dieses kilometrische System [2]) ist also beispielsweise zur Berechnung von planetarischen Gravitationskräften geeignet, die, auf die sonst gebräuchlichen Einheiten bezogen, zu unbequem großen Zahlen führen.

Schwerkraft, Gewicht. Die im vorhergehenden Paragraphen (und 15
auch schon im §. 6) definirten absoluten Krafteinheiten sind von der Lage des Beobachtungsortes unabhängig. Anders verhält es sich, wenn Gewichte, z. B. Lothe, Pfunde, Gramme, Kilogramme u. s. w., als Kraftmaße verwendet werden, denn die Gewichte der so benannten Massen hängen von der Acceleration der Schwere, somit von der geographischen Breite und Meereshöhe ab und können daher nur bei einer bestimmten Schwere-Beschleunigung ihre normalen Werthe haben.

Eine gegebene Masse hat also an den Beobachtungsorten A und B nicht dasselbe Gewicht, an einer Federwaage gemessen, wenn diese Orte verschiedenen geographischen Breiten und Meereshöhen angehören. Die Kraft, mit der diese Masse zur Erde gravitirt, ist z. B. in Potsdam um 0,0424 Procente größer als in Wien, entsprechend dem Verhältnisse der Beschleunigungen 9,81292 : 9,80876 = 1,000424 . . . an beiden Orten [3]). Eine Federspannung, die

---

[1]) Die Grundlagen dieser Berechnungen findet man im §. 17 und im II. Theile (§§. 56, 58, 61).

[2]) So wie wir dieses Maßsystem kurz das kilometrische genannt haben, könnte man das C-G-S-System kurz das centimetrische, das D-K-S-System das decimetrische, das M-T-S-System das metrische u. s. w. nennen, da bei allen der Wasserwürfel der Längeneinheit als Masseneinheit gilt, und allen die Secunde als Zeiteinheit gemeinschaftlich ist.

[3]) Der Rechnung sind zu Grunde gelegt: einerseits die Acceleration der Schwere im geodätischen Institute in Potsdam, nach R. v. Sterneck 9,81293, nach anderen Bestimmungen 9,81291, wovon wir das Mittel 9,81292 eingesetzt haben, und anderseits die Acceleration der Schwere im k. u. k. militär-geographischen Institute zu Wien, nach R. v. Sterneck 9,80876, in Uebereinstimmung (mit Rücksicht auf die geographischen Breiten und Meereshöhen beider Stationen) mit früheren Beob-

in Wien durch die Belastung mit einem Kilogrammgewichtstücke bewirkt wird, kann demnach in Potsdam durch die Belastung mit nur

$$\frac{9{,}80876}{9{,}81292} = 0{,}999576 \ldots \text{ Kilogramm}$$

hervorgebracht werden, also durch die Belastung mit einer um nahezu 424 Milligramm geringeren Masse [1]).

Will man für die an beliebigen Orten durch Gewichte hervorgebrachten Zug- oder Druckkräfte genau vergleichbare Werthe haben, so muß man sie alle auf die soeben ersichtlich gemachte Art auf eine bestimmte Acceleration der Schwere, die wir die Normal-Beschleunigung nennen wollen, umrechnen.

Die gegenwärtig angenommene Normal-Beschleunigung = 9,806652 m ist im §. 14 bereits besprochen und in der Formel 30a der Definition des Grammgewichtes zu Grunde gelegt worden.

Wir definiren demnach das Gramm, oder das Kilogramm in dem Sinne einer Zug- oder Druckkraft als die Kraft, mit der die Masse eines Gramm- oder Kilogrammgewichtsstückes bei der angenommenen Normal-Beschleunigung zur Erde gravitirt, oder kürzer und allgemeiner: wir definiren überhaupt die Gewichtseinheit als die Kraft, mit der die Masse der Volumseinheit Wassers größter Dichte bei der Normal-Beschleunigung der Schwere zur Erde gravitirt [2]). (Siehe auch II. Theil, §. 53.)

---

achtungen v. Oppolzer's an der Wiener Sternwarte, die den Werth 9,80866 ergeben hatten. (Robert v. Sterneck, Relative Schwerebestimmungen, ausgeführt im Jahre 1893. Separatabdruck aus den Mittheilungen des k. u. k. militär-geographischen Institutes, 13. Bd., Separatabdruck, S. 44.)

[1]) Soll dieselbe Federspannung hervorgebracht werden, einmal im Orte A bei der Acceleration g und ein anderes Mal im Orte B bei der Acceleration g', so werden die zur Belastung erforderlichen Massen m und m' der Gleichung $mg = m'g'$ entsprechen müssen, woraus $m' = \frac{g}{g'}\, m$ folgt. Beziehen sich z. B. die Größen m und g auf Wien und m' und g' auf Potsdam, so ergibt sich

$$m' = \frac{g}{g'}\, m = \frac{9{,}80876}{9{,}81292} \times m = 0{,}999576 \ldots \times m$$

wie oben, wenn $m = 1$ gesetzt wird.

[2]) Bei der Acceleration der Schwere g kommt nicht nur die geographische Breite φ, sondern auch die Höhe H des Beobachtungsortes über der Meeresfläche in Betracht, und es ist nach der Formel von Helmert

$$g = 9{,}780\ (1 + 0{,}005310\ \sin^2\varphi)\left(1 - \frac{2H}{R}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad 33)$$

wobei R den Endradius bedeutet. (Helmert, Höhere Geodäsie, II. Theil, S. 241 und R. v. Sterneck im 11. Bande der Mittheilungen des k. und k. militär-geographischen Institutes, Separatabdruck S. 83.) In dieser Formel ist 9,780 der Werth der Schwere-Beschleunigung im Meeresniveau unter dem Aequator. (Siehe meinen Grundriß der mechanischen Physik, S. 72.) Später wurde dem Ausdrucke 9,78 $(1 + 0{,}00531\ \sin^2\varphi)$ noch das Correctionsglied + 0,00045 beigefügt. (R. von Sterneck, Relative Schwerebestimmungen, ausgeführt in den Jahren 1895 u. 1896,

Uebrigens wird anstatt des genauen Werthes der Normal-Beschleunigung sehr häufig der schon im vorhergehenden Paragraphen besprochene angenäherte Werth 9,81 *m* angenommen, was auch in diesem Buche in der Regel geschehen ist.

Irdisches Maßsystem. Vor der Einführung der absoluten Maße war 16
es allgemein üblich, und auch jetzt noch ist es nicht selten gebräuchlich, eine Gewichtseinheit, z. B. das Kilogramm, als Krafteinheit gelten zu lassen und dabei jene Masse als Masseneinheit anzusehen, die von der Kraft eines Kilogrammes angetrieben, die Beschleunigung von einem Meter in der Secunde annehmen würde. Da dieselbe Kraft der Masse eines Kilogrammgewichtsstückes (Cubikdecimeter Wasser) bekanntlich die Beschleunigung von 9,81 Meter in der Secunde ertheilt, so muß die soeben definirte Masseneinheit, da sie durch den gleichen Antrieb nur die Beschleunigung von einem Meter in der Secunde annehmen soll, offenbar 9,81 mal so groß, also der Masse von 9,81 Kilogrammgewichtsstücken gleich sein.

Auf diese Masseneinheit bezogen hat die Masse eines Kilogrammgewichtsstückes nur den Werth $\frac{1}{9{,}81} = 0{,}1019 \ldots$ und somit die Masse von p Kilogrammgewichtsstücken den Werth $\frac{p}{9{,}81}$ oder $\frac{p}{g}$, wenn man $9{,}81 = g$ setzt.

Ein Beispiel mag zur Erläuterung dienen. Wir denken uns ein Metallstück vom Gewichte $p = 0{,}2$ Kilogramm, an einer Schnur von der Länge $R = 1$ Meter befestigt, in einem Kreise herumgeschwungen, mit solcher Geschwindigkeit, daß diese kreisförmige Bahn in je 2 Secunden 3mal, also in der Zeit $T = \frac{2}{3}$ einmal zurückgelegt wird. Es soll die Kraft, in Kilogrammen ausgedrückt, berechnet werden, mit der die Schnur von der entwickelten Fliehkraft auf Zug beansprucht wird.

Die Fliehkraft pro Masseneinheit, also die sogenannte Beschleunigung der Fliehkraft, beträgt bei der kreisförmigen Bewegung bekanntlich $\frac{4\pi^2 R}{T^2}$, also in unserem Falle $\frac{4\pi^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 88{,}825$ Meter. Multipliciren wir diese Zahl mit der Masse $\frac{p}{g} = \frac{0{,}2}{9{,}81}$ des Beweglichen, so erhalten wir für die gesuchte Zugkraft 1,81 Kilogramm.

Separatabdruck aus den Mittheilungen des k. u. k. militär-geographischen Instituts, 17. Band, S. 10.) Helmert selbst hatte in einer 1896 in Berlin erschienenen Abhandlung bereits die Correction +0,00035 eingeführt. Wir kommen im II. Theile, §. 59, darauf zurück.

Wollte man dagegen z. B. im C-G-S-System rechnen, um die besagte Zugkraft in Dynen zu ermitteln, so hätte man $R = 100$ Centimeter zu setzen und erhielte dann für die Beschleunigung der Fliehkraft den Werth 8882,5 Centimeter. Dies mit der Masse = 200 Gramm multiplicirt, gibt die gesuchte Zugkraft in Dynen = 1776510. Da nun 981 Dynen (Formel 25) der Kraft von einem Gramm und also 981000 Dynen der Kraft eines Kilogramms gleichkommen, so kann man durch Division mit dieser Zahl die in Dynen ausgedrückte Zugkraft in Kilogramme verwandeln und erhält dann

$$\frac{1776510}{981000} = 1{,}81 \text{ Kilogramm},$$

wie bei der früheren Rechnung.

Ein Maßsystem, in dem die Gewichtseinheit als Krafteinheit dient, insbesondere das soeben erörterte und auch jetzt noch in der Technik häufig angewendete, mit dem Kilogramm als Krafteinheit, dem Meter als Längeneinheit und mit 9,81 Kilogramm-Massen als Masseneinheit, — dieses Maßsystem wird das irdische oder terrestrische Maßsystem[1]) genannt, womit angedeutet sein soll, daß es auf die Wirkung der irdischen Schwere gegründet ist.

Das irdische Maßsystem hat im Vergleiche mit dem absoluten C-G-S-System die 100fache Längeneinheit, die 9810fache Masseneinheit und somit die 981000fache Krafteinheit.

Im irdischen Maßsysteme berechnet man z. B. die Fliehkraft F bei einer beliebigen krummlinigen Bewegung, in Kilogrammen ausgedrückt, nach der Formel

$$F = \frac{p}{g} \cdot \frac{v^2}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 34)$$

wobei p das Gewicht des Beweglichen in Kilogrammen, $g = 9{,}81$, v die augenblickliche Geschwindigkeit des Beweglichen in Metern und r, gleichfalls in Metern, den Krümmungsradius der Bahncurve an der betrachteten Stelle, für die der augenblickliche Werth F der Fliehkraft ermittelt werden soll, bedeuten.

Im C-G-S-System dagegen rechnen wir nach der Formel

$$F = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 35)$$

wobei m die Masse des Beweglichen in Grammen, v dessen augenblickliche Geschwindigkeit in Centimetern und r, gleichfalls in Centimetern ausgedrückt, den Krümmungsradius der Bahncurve an der betrachteten Stelle bedeuten, für die wir nunmehr den augenblicklichen Werth F der Fliehkraft, in Dynen ausge-

[1]) Siehe Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung, 4. Auflage (1901), S. 318 und Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik und Meteorologie, neunte umgearbeitete und vermehrte Auflage von Leopold Pfaundler, Bd. 1, S. 93. (Dieses Buch soll im Folgenden kurz als Pfaundler's Lehrbuch der Physik angeführt werden.

drückt, erhalten. Dieser Werth durch 981000 dividirt gibt uns den Werth der Fliehkraft in Kilogrammen, wie an einem Beispiele bereits gezeigt worden ist [1]).

Uebrigens wollen wir hinsichtlich der Messung der in der Form von Gewichten wirkenden Zugkräfte noch hervorheben, daß wohl die Anzeigen der Federwaagen, nicht aber die der Hebelwaagen, die eben nur zu statischen Massen-Messungen dienen, von der Verschiedenheit der Schwere auf der Erdoberfläche abhängig und somit als eigentliche Gewichts-Anzeigen anzusehen sind. Eine Hebelwaage läßt nicht erkennen, daß ein Körper in Potsdam schwerer ist als in Wien, wohl aber eine hinreichend empfindliche Federwaage. (Weiteres im II. Theile, §. 60.)

Gravitationsconstante. Die Kraft p mit der zwei Massen m und m' 17
in der Entfernung r einander anziehen [2]), ist nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze mit den Massen direct und mit dem Quadrate des Abstandes verkehrt proportional und wird also ausgedrückt in der Formel

$$p = Const. \frac{m\,m'}{r^2} = k \cdot \frac{m\,m'}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 36)$$

wobei die Constante k ein von der Wahl der Einheiten abhängiger Proportionalitätsfactor ist, den man die Gravitationsconstante nennt. Zur Ermittelung ihres Werthes führt folgende Betrachtung.

Wir denken uns die Erde, deren in Grammen ausgedrückte Masse M heißen soll, nicht rotirend und kugelförmig und die unter diesen Voraussetzungen auf der Erdoberfläche, unabhängig von der geographischen Breite, herrschende Beschleunigung, in Centimetern ausgedrückt, mit G bezeichnet. Dann wird die Kraft p, mit der eine auf der Erdoberfläche befindliche Masse von m Grammen gegen den Mittelpunkt der Erde gravitirt, durch die Gleichung $p = m\,G$ in Dynen ausgedrückt werden. Anderseits muß aber diese Kraft, auf dieselbe Einheit bezogen, nach Formel 36 auch durch $p = k \cdot \frac{M\,m}{R^2}$ ausgedrückt werden, wenn man für den Abstand r der beiden Massen M und m den

---

[1]) Für eine gleichförmige Bewegung in einem Kreise vom Halbmesser R und bei der Umlaufszeit T hat man nämlich in die Formel 35 $v = \frac{2\,\pi\,R}{T}$ und $r = R$ einzusetzen, wodurch dann der im vorstehenden Zahlenbeispiel gebrauchte Ausdruck $\frac{4\,\pi^2\,R}{T^2}$ für die Beschleunigung der Fliehkraft sich ergibt. Die Nachweisung der Gesetze der Fliehkraft enthält mein Grundriß der mechanischen Physik, S. 68 bis 72.

[2]) Wir setzen hier durchweg voraus, daß die Massen m und m' concentrisch homogene Kugeln und die Abstände r von Mittelpunkt zu Mittelpunkt gemessen seien.

Erdhalbmesser R in Centimetern einsetzt. Es besteht demnach die Gleichung

$$k \cdot \frac{Mm}{R^2} = mG,$$

woraus der Werth der Gravitationsconstante

$$k = \frac{GR^2}{M} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 37)$$

folgt. Sie bedeutet, wie aus der Formel 36 ersichtlich ist, die zwischen zwei Masseneinheiten ($m = m' = 1$) im Abstande der Längeneinheit ($r = 1$) wirksame Anziehung.

Nimmt man $G = 982{,}3$; $R = 637 \times 10^6$ und $M = 6064 \times 10^{24}$ (siehe II. Theil, §. 61), so erhält man

$$k = 65730 \times 10^{-12}.$$

Aus der Bewegung des Mondes um die Erde habe ich

$$k = 65796 \times 10^{-12}$$

und aus der Bewegung der Erde um die Sonne

$$k = 66537 \times 10^{-12}$$

abgeleitet. Aus einem Versuche von F. Reich[1]) mit der Drehwaage hatte sich ergeben

$$k = 65600 \times 10^{-12}.$$

Ferner gibt Baron Eötvös, da die Untersuchungen über die Gravitationsconstante noch nicht abgeschlossen sind, einstweilen den „provisorischen Werth"

$$k = 66500 \times 10^{-12},$$

während sich Poynting für die Zahl

$$k = 66984 \times 10^{-12}$$

entscheidet[2]). Mit Berücksichtigung dieser Zahlenwerthe und der denselben noch anhaftenden Unsicherheit wollen wir uns auf die Feststellung der zwei höchsten Stellen der Ziffernreihe beschränken und die Gravitationsconstante

$$k = 66000 \times 10^{-12}$$

oder

$$k = 66 \times 10^{-9} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 38^3)$$

in runder Zahl annehmen.

---

[1]) H. Börner, Lehrbuch der Physik, S. 193.

[2]) Näheres über die Zahlen von Eötvös und Poynting enthält der 3. Bd. des Werkes: Rapports présentés au Congrès International de Physique réuni à Paris en 1900 etc. Seite 328 und 337.

Für die Dichte der Erde gibt Eötvös die Zahl 5,55 ± 0,01 und Poynting 5,4924 an.

[3]) Diese Zahl ist zugleich ziemlich genau der Mittelwerth (66021 × 10⁻¹²) der drei vorhin angeführten von mir berechneten Zahlen, nämlich aus der Fallbeschleunigung auf der Erde, aus der Centralbewegung des Mondes und aus der Centralbewegung der Erde.

Wird die Masse der Volumseinheit Wassers von der größten Dichte als Masseneinheit beibehalten, so ändert sich die Masseneinheit mit dem Würfel der Längeneinheit und die Dimension der Gravitationsconstante ist dann, wie der Ausdruck in Formel 37 erkennen läßt, $= 1$. Der Zahlenwerth der Gravitationsconstante bleibt also ungeändert, wenn man vom C-G-S-System auf das D-K-S-System, oder auf das M-T-S-System u. s. w. oder endlich auf das kilometrische System (§. 14) übergeht; dieser Zahlenwerth bleibt überhaupt derselbe für alle Maßsysteme, in denen der Wasserwürfel der Längeneinheit als Masseneinheit und die Secunde als Zeiteinheit gilt.

Will man die Anziehungskraft $p = k \frac{m m'}{r^2}$ (wobei m und m' in Grammen und r in Centimetern gegeben sind) nicht in Dynen, sondern auf das Gramm als Krafteinheit bezogen ausgedrückt haben, so muß man im Sinne der Formel 30 die Größe

$$k' = \frac{k}{981} = 67{,}3 \times 10^{-12} \quad \ldots\ldots \quad 39)$$

als Gravitationsconstante einführen. Eine weitere Division durch 10 gibt endlich die Zahl

$$k'' = \frac{k'}{10} = 6{,}73 \times 10^{-12} \quad \ldots\ldots \quad 40)$$

die als Gravitationsconstante anzuwenden ist, wenn m und m' in Kilogrammen und r in Metern gegeben sind und die Anziehung in Kilogrammen berechnet werden soll[1]). Diese Zahl stellt also in Kilogrammen ausgedrückt die Kraft dar, mit der zwei Kilogramm-Massen im Abstande von einem Meter einander anziehen. Das 1000×1000fache dieses Betrages, nämlich

$$6{,}73 \times 10^{-6}\,\text{kg} = 6{,}73\,\text{mgr},$$

ergibt sich für die anziehende Wechselwirkung zweier Massen von je einer Tonne, z. B. zweier bleierner Kugeln von 553 mm Durchmesser, deren Mittelpunkte 1 m von einander entfernt sind. Das $\frac{10^9 \times 10^9}{10^3 \times 10^3} = 10^{12}$fache dieser Kraft, also $6{,}73 \times 10^6$ kg ergibt sich für die gegenseitige Anziehung zweier 1 km von einander entfernter kilometrischer Masseneinheiten, z. B. zweier Wasserkugeln von je $1\,\text{km}^3$ Rauminhalt (1240,7 m Durchmesser).

---

[1]) Für das Gramm als Krafteinheit gilt nach 39 die Formel $p = k' \frac{m m'}{r^2}$, wobei m und m' in Grammen und r in Centimetern angegeben ist. Sind aber m und m' in Kilogrammen und r in Metern angegeben und will man p in Kilogrammen berechnet haben, so hat man die Gleichung

$$1000\,p = k' \cdot \frac{1000\,m \times 1000\,m'}{100\,r \times 100\,r}, \quad \text{also} \quad p = \frac{k'}{10} \cdot \frac{m m'}{r^2}.$$

Wollte man jene Masse x (in Grammen) berechnen, die, in einem Punkt concentrirt gedacht, auf eine ebensolche und gleichgroße in der Entfernung $= 1$ cm mit der Kraft $= 1$ Dyn einwirkt, so ergäbe sich diese aus der Gleichung

$$k \frac{x^2}{1} = 1, \text{ also } x = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{660 \times 10^{-10}}} = 3892{,}5 \text{ gr.}$$

Aus dem soeben angeführten Zahlenbeispiel findet man ferner durch eine einfache Rechnung, daß zwei kugelförmige Massen von je 389,25 kg (z. B. zwei bleierne Kugeln von 403,7 mm Durchmesser), deren Mittelpunkte 1 m von einander entfernt sind, gerade mit der Kraft einer Dyne einander anziehen[1]).

Die im §. 14 angegebenen Werthe für die Gravitation der Himmelskörper beruhen gleichfalls auf der Anwendung der Gravitationsconstante. (Siehe auch II. Theil, § 61.)

18 **Arbeit.** Wenn eine Kraft einen Widerstand überwindet, indem sie eine Verschiebung ihres Angriffspunktes bewirkt (wie z. B. eine Zugkraft bei der Hebung eines Gewichtes), so verrichtet sie „Arbeit“[2]). Ist die Kraft p constant und liegt die Strecke s der betrachteten Verschiebung ihres Angriffspunktes in ihrer Richtung, so stellt das Product

$$L = ps \quad \ldots \quad 41)$$

den Zahlenwerth der dabei verrichteten Arbeit vor. Ist die arbeitverrichtende Kraft p veränderlich (wie z. B. der abnehmende Druck eines sich ausdehnenden Gases oder einer Feder), so findet man den Werth der auf der Strecke $s = s_2 - s_1$ verrichteten Arbeit durch eine Integration in der Form

$$L = \int_{s_1}^{s_2} p\,ds \quad \ldots \quad 42^3)$$

Aus beiden Ausdrücken ist ersichtlich, daß die Dimension eines mechanischen Arbeitswerthes (Kraft $\times$ Weg) durch das Product der Dimensionen einer Kraft mlt^{-2} und einer Länge l, also durch

$$(L) = l^2 m t^{-2} \quad \ldots \quad 43)$$

dargestellt werden muß.

Anderseits liegt den Ausdrücken 41 und 42 auch die Annahme zu Grunde, daß wir als Arbeitseinheit die Arbeit ansehen, die von der Krafteinheit auf

[1]) Hier ist das specifische Gewicht des Bleies $= 11{,}3$ gr pro 1 cm^3 angenommen.

[2]) Poncelet hat in einer Schrift vom Jahre 1826 für diesen Begriff die Ausdrücke travail mécanique und quantité d'action abwechselnd gebraucht, später aber, von Coriolis dazu bewogen, ausschließlich den ersteren. (Rosenberger, Geschichte der Physik, 3. Theil, S. 246.)

[3]) Dieser Ausdruck gilt auch für den Fall einer krummlinigen Bewegung, wenn man sich unter p stets die tangentielle Kraftcomponente vorstellt, im Sinne der S. 104 meines Grundrisses der mechanischen Physik gegebenen Darlegung.

einer Strecke gleich der Längeneinheit verrichtet wird, also im C-G-S-System die Druckwirkung eines Dyn auf einer Strecke von der Länge eines Centimeters Wir nennen diese Arbeit ein Centimeterdyn oder ein Erg (nach dem griechischen Worte ἔργον, das Werk). Wir definiren demnach die Arbeitseinheit des C-G-S-Systems

$$1 \text{ Erg} = 1\,(C^2GS^{-2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 44)$$

Diese Einheit ist jedoch in vielen Fällen zu klein und würde zu unbequem großen Zahlen führen, denn es macht z. B. die Arbeit, die wir bei der Hebung eines Kilogrammes auf die Höhe eines Meters verrichten, schon beinahe hundert Millionen Erg aus. Man hat deshalb einen viel größeren Arbeitswerth, nämlich (in Uebereinstimmung mit der im §. 11 angegebenen Regel) den Arbeitswerth von 10^7 Erg als practische Arbeitseinheit und zwar unter dem Namen Joule eingeführt. Es ist demnach

$$1 \text{ Joule} = 10^7 \text{ Erg} = 10^7\,(C^2GS^{-2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 45)$$

Im irdischen Maßsystem (§. 16) ist das Kilogrammmeter[1]) oder Meterkilogramm (mkg) als Arbeitseinheit gebräuchlich. Da ein Gramm (als Krafteinheit) 981 Dynen, ein Kilogramm also 981000 Dynen gleichkommt, so beträgt ein Kilogrammmeter 981000×100 Erg $= 9{,}81 \times 10^7$ Erg, oder

$$1 \text{ Kilogrammmeter} = 9{,}81 \text{ Joule} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 46)$$

Ein Joule ist demnach annähernd um 2 Proc. größer als $^1/_{10}$ mkg, nämlich $= \frac{1}{9{,}81} = 0{,}1019$ mkg.

Wenn man vom C-G-S-System auf das D-K-S-System, auf das M-T-S-System u. s. w. und endlich auf das kilometrische Maßsystem (§. 14) übergeht, so ergeben sich Arbeitseinheiten, die der Reihe nach 10^5, 10^{10} u. s. w. und endlich 10^{25} Erg, also $\frac{1}{100}$ Joule, 1000 Joule u. s. w. und endlich 10^{18} Joule betragen; oder allgemein: wenn man anstatt des Centimeters eine Länge von l Centimetern als Längeneinheit annimmt, so ergibt sich eine Arbeitseinheit von l^5 Erg, immer vorausgesetzt, daß der Wasserwürfel der Längeneinheit als Masseneinheit und die Secunde als Zeiteinheit beibehalten werden.

Wie man nach dem Gesagten leicht findet, beträgt die Arbeitseinheit des

---

[1]) Das Kilogramm-Meter, d. i. „die Druckwirkung eines Kilogrammgewichtes auf die Strecke eines Meters", wurde von Poncelet als Arbeitseinheit angenommen. Siehe Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung. 4. Auflage (1901), Seite 309.

Ein englisches Fußpfund hat $1{,}356 \times 10^7$ Erg $= 1{,}356$ Joule, wenn man die Acceleration der Schwere $= 981$ cm annimmt.

metrischen Systems (d. i. des M-T-S-Systems) 101,9 . . . mkg und die Arbeitseinheit des kilometrischen Systems 101,9 . . . $\times 10^{15}$ mkg.

19 **Drehungsmoment.** Man nennt das Product einer Kraft mit der aus einem Punkte außerhalb ihrer Richtung auf diese gefällten Senkrechten im Allgemeinen das Moment der Kraft bezüglich jenes Punktes.

Wenn eine Kraft (oder Kraftcomponente) einen Körper um eine mit ihm fest verbundene Axe (Drehungsaxe) zu drehen strebt und ihre Richtung in einer auf diese Axe senkrechten Ebene liegt, wird das Product der Kraft mit dem Abstande ihrer Richtung von der Drehungsaxe das Drehungsmoment jener Kraft (oder Kraftcomponente) bezüglich dieser Axe genannt.

Das Product $p\,a$ einer Kraft p mit dem Abstande a ihrer Richtung von der Drehungsaxe hat nach §§. 8 und 9, Formel 11 offenbar die Dimension $l m t^{-2} \times l$, also

$$(p\,a) = l^2 m t^{-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 47)$$

übereinstimmend mit der Dimension einer Arbeitsgröße (Formel 43).

Die C-G-S-Einheit für Drehungsmomente ist gleich jenem, das ausgeübt wird, wenn die Kraft einer Dyne an einem centimeterlangen Hebelarm rechtwinkelig angreift, also

$$\text{Einheit der Drehmomente} = 1\,(C^2 G S^{-2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 48)$$

20 **Trägheitsmoment.** Unter dem Trägheitsmomente eines um eine Gerade als Axe drehbaren Körpers versteht man die Summe der Producte der einzelnen Massentheilchen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ mit den Quadraten ihrer Abstände $r_1, r_2, r_3, \ldots$ von der Drehungsaxe, also die Größe

$$\Sigma m r^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots$$

die bei stetiger Anordnung der Masse die Form eines Integrales[1]) annimmt und in jedem Falle die Dimension

$$(\Sigma m r^2) = l^2 m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 49)$$

hat. Für das C-G-S-System ergibt sich demnach eine

$$\text{Einheit der Trägheitsmomente} = 1\,(C^2 G) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 50)$$

entsprechend dem Trägheitsmomente eines mit der Masse eines Grammes behafteten und ein Centimeter von der Drehungsaxe entfernten Punktes.

Wäre z. B. für einen Magnetstab das Trägheitsmoment 217 000 000 ($Mm^2 Mg$)[2]), d. h. in Millimetern und Milligrammen gegeben, so fände man

[1]) Wie z. B. in den Seite 62 bis 65 meines Grundrisses der mechanischen Physik betrachteten Fällen.

[2]) Ein rechtwinkelig parallelopipedischer Magnetstab mit den Kantenlängen $a = 100{,}5$ mm, $b = c = 18$ mm und dem Gewichte $M = 249\,450$ mgr hat für eine durch den Schwerpunkt gehende, mit der Kante c parallele Drehungsaxe nach der bekannten Formel $\frac{M}{12}(a^2 + b^2)$ in runder Zahl dieses Trägheitsmoment.

das Trägheitsmoment in Centimetern und Grammen durch Division mit $10^2 \cdot 1000 = 10^5$ und erhielte 2170 (C^2G), was übrigens auch die allgemeinere Formel 16 in §. 10 ergeben hätte.

Lebendige Kraft. Aus den Grundlehren der Mechanik ist bekannt, daß 21
ein mit der Geschwindigkeit v vertical aufwärts geschossenes Projectil in der Zeit $t = \frac{v}{g}$ die Höhe $h = \frac{v^2}{2g}$ („Steighöhe" oder „Geschwindigkeitshöhe") erreichen müßte, wenn kein Luftwiderstand vorhanden wäre und die Acceleration g der Schwere mit der Entfernung von der Erde nicht abnehmen würde. Hat das Projectil die Masse von m Grammen und drücken wir die Längen v, g und h in Centimetern und die Zeit t in Secunden aus, so stellt $p = mg$ in Dynen den constanten Widerstand der Schwerkraft vor, den das aufsteigende Geschoß zu überwinden hatte, und somit $mg \times \frac{v^2}{2g} = \frac{mv^2}{2}$ in Erg die dabei verrichtete Arbeit. Eine mit der Geschwindigkeit v begabte Masse m hat demnach das Vermögen, indem sie bei Ueberwindung eines Widerstandes ihre Geschwindigkeit abgibt, diese Arbeit, die man deshalb ihre „lebendige Kraft"[1]) genannt hat, zu verrichten.

In der That entspricht auch dem Ausdrucke $\frac{mv^2}{2}$ die Dimension $m\,(lt^{-1})^2 = l^2mt^{-2}$, also die Dimensionsformel

$$\left(\frac{mv^2}{2}\right) = l^2mt^{-2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 51)$$

so wie einem Arbeitswerthe nach Formel 43, und wenn wir die vorstehend angeführten Bezeichnungen anwenden, kann der Werth der betrachteten lebendigen Kraft auch in der Form

$$\frac{mv^2}{2} = mg \cdot \frac{v^2}{2g} = ph$$

übereinstimmend mit dem Arbeitsausdrucke Formel 41 dargestellt werden.

Energie. Die im vorigen Paragraphen definirte „lebendige Kraft" 22
wird auch Energie der Bewegung oder kinetische Energie, oder auch actuelle Energie genannt, zur Unterscheidung von der statischen Energie, Energie der Lage, oder potentiellen Energie, wie sie z. B. einem Gewichte $p = mg$ zukommt, das sich in einer Höhe h über der Erdoberfläche

---

[1]) Die Benennung: „lebendige Kraft" hat Coriolis dem Ausdrucke $\frac{mv^2}{2}$ beigelegt, während früher (1695) Leibnitz die Größe mv^2 so benannt hatte. Siehe Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung. 4. Auflage (1901), S. 308.

ruhend befindet und vermöge seiner Lage befähigt ist: entweder, indem es Widerstände überwindend herabsinkt, eine Arbeit vom Betrage ph zu verrichten, oder, indem es frei herabfällt, vermöge der dabei erreichten Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ eine gleichwerthige lebendige Kraft $\frac{mv^2}{2}$ zu erlangen. Beide Energieformen[1]) stellen Arbeitsvermögen dar und werden daher in Arbeitseinheiten (Erg, Joule) ausgedrückt.

23 **Wärmeäquivalent.** Die zuerst von J. R. Mayer in Heilbronn mit Bestimmtheit ausgesprochene und von Joule in Manchester in überzeugender Weise nachgewiesene Thatsache, daß durch Verbrauch von Wärme Arbeit erzeugt und durch Verbrauch von Arbeit Wärme hervorgerufen werden kann, bringt es mit sich, daß einer Wärmeeinheit eine bestimmte Arbeitsgröße und einer Arbeitseinheit eine bestimmte Wärmemenge äquivalent sein muß. Die erstere Größe hat man das mechanische Aequivalent der Wärme, die letztere das calorische Aequivalent der Arbeit genannt.

Eine Einigung über eine internationale Wärmeeinheit ist noch nicht zu Stande gekommen und wir werden die hierüber gemachten Vorschläge im II. Theile (§. 63) besprechen.

Einstweilen wollen wir nach dem neuesten Vorschlage[2]) jene Wärmemenge als practische Wärmeeinheit annehmen, die erforderlich ist, um die Masseneinheit Wasser von der Temperatur $14^1/_2{}^0$ C. auf die Temperatur $15^1/_2{}^0$ C. zu erwärmen.

Wir wollen die so definirte Wärmeeinheit als Gramm-Calorie oder als Kilogramm-Calorie bezeichnen, je nachdem wir das Gramm oder das Kilogramm als Masseneinheit gebrauchen.

Zur Erzeugung einer Wärmemenge, die der soeben definirten 15^0-Gramm-Calorie gleich kommt, ist nach Rowland ein Arbeitsaufwand von 4,189 Joule oder $4{,}189 \times 10^7$ Erg) erforderlich[3]). Auf die Kilogramm-Calorie kommen demnach 4189 Joule oder (nach Formel 46) rund 427 mkg.

Wenn wir das mechanische Aequivalent der Gramm-Calorie mit $\mathcal{E}$ und den reciproken Werth $\frac{1}{\mathcal{E}}$ mit A bezeichnen, so erhalten wir demnach für

---

[1]) Näheres hierüber enthält mein Grundriß der mechanischen Physik, S. 107 bis 110.

[2]) E. Warburg hat am 22. September 1899 auf der Naturforscher-Versammlung in München als practische Wärmeeinheit die Wärmemenge vorgeschlagen, die erforderlich ist, um ein Gramm Wasser von $14^1/_2{}^0$ C. auf $15^1/_2{}^0$ C. zu erwärmen, und hat diese Wärmeeinheit die 15^0-Wassercalorie genannt. (Siehe E. Warburg, Referat über die Wärmeeinheit u. s. w. Leipzig, J. A. Barth, 1900.)

[3]) Siehe die citirte Abhandlung von E. Warburg, S. 17.

das C-G-S-System

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{A} = 4{,}189 \times 10^7 \text{ Erg} \quad \ldots \ldots \quad 52\,\text{I})$$

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{A} = 4{,}189 \text{ Joule} \quad \ldots \ldots \quad 52\,\text{II})$$

und als Wärmeäquivalente der Arbeitseinheiten Erg und Joule

$$\frac{1}{\mathfrak{E}} = A = 0{,}2387 \ldots \times 10^{-7} \text{ gr-Cal.} \quad \ldots \quad 53\,\text{I})$$

$$\frac{1}{\mathfrak{E}} = A = 0{,}2387 \text{ gr-Cal.} \quad \ldots \ldots \quad 53\,\text{II})$$

wenn wir die Gramm-Calorie mit gr-Cal. bezeichnen.

Geht man von einem Maßsystem auf ein anderes über, z. B. vom C-G-S-System auf das D-K-S-System (§. 14), so kommt zunächst in Betracht, daß die 10fache Längeneinheit (Decimeter statt Centimeter) eine 10^3fache Masseneinheit mit sich bringt und also an die Stelle der Gramm-Calorie die Kilogramm-Calorie tritt, zu deren Erzeugung demnach die 10^3fache Arbeit, also die Arbeit von $4{,}189 \times 10^7 \times 10^3 = 4189 \times 10^7$ Erg erforderlich sein wird. Diese Arbeit ist aber jetzt nicht mehr in Erg ($C^2 G S^{-2}$), sondern in der 10^5mal größeren Arbeitseinheit des D-K-S-Systems ($D^2 K S^{-2}$) auszudrücken, die der Hebung einer mit der Beschleunigung eines Decimeters zur Erde gravitirenden Kilogramm-Masse auf die Höhe eines Decimeters entspricht. Das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit ist also 418 900 ($D^2 K S^{-2}$).

Diese Betrachtung läßt sich verallgemeinern und sie lehrt, daß man beim Uebergange auf ein Maßsystem, das im Vergleiche mit dem C-G-S-System die $l$fache Längeneinheit, somit die l^3fache Masseneinheit und die l^5fache Arbeitseinheit hat [1]), den dem C-G-S-System zukommenden Zahlenwerth des mechanischen Wärmeäquivalentes = 41 890 000 durch $\frac{l^5}{l^3} = l^2$ zu dividiren hat. Bezeichnet man also mit $\mathfrak{E}_n$ das mechanische Wärmeäquivalent für ein System, dessen Längeneinheit $= l = 10^n$ Centimeter beträgt, so ist

$$\mathfrak{E}_n = \frac{41\,890\,000}{10^{2n}} \quad \ldots \ldots \quad 54)$$

Man erhält demnach

$\mathfrak{E}_0 = 41\,890\,000$ für das C-G-S-System
$\mathfrak{E}_1 = 418\,900$ „ „ D-K-S-System
$\mathfrak{E}_2 = 4\,189$ „ „ M-T-S-System
. . . . . .
$\mathfrak{E}_5 = 0{,}004\,189$ für das kilometrische Syst

(§. 14).

[1]) Stets mit Beibehaltung der Secunde als Zeiteinheit.

Die entſprechenden caloriſchen Aequivalente der Arbeitseinheit, $A = \frac{1}{\mathcal{E}}$, ſind dann die folgenden reciproken Werthe

$A_0 = 0{,}2387 \times 10^{-7}$; $A_1 = 0{,}2387 \times 10^{-5}$; $A_2 = 0{,}2387 \times 10^{-3}$

und endlich für das kilometriſche Syſtem

$$A_5 = 0{,}2387 \times 10^{3}.$$

Will man endlich die Gewichtseinheit, d. i. das Gewicht der Volumseinheit Waſſer, bei der Acceleration 981 cm = 98,1 dm = 9,81 m = ... = 0,00981 km als Krafteinheit einführen, ſo hat man die vorſtehenden Werthe von $\mathcal{E}$ der Reihe nach durch dieſe in der betreffenden Längeneinheit ausgedrückten Beſchleunigungswerthe zu dividiren und erhält, wenn man die erhaltenen Quotienten im Allgemeinen mit $\mathcal{E}'_n$ bezeichnet,

$\mathcal{E}'_0 = 42700$; $\mathcal{E}'_1 = 4270$; $\mathcal{E}'_2 = 427 \ldots \mathcal{E}'_5 = 0{,}427$,

oder allgemein

$$\mathcal{E}'_n = \mathcal{E}_n : \frac{981}{10^n} = \frac{41\,890\,000}{10^{2n}} : \frac{981}{10^n},$$

alſo

$$\mathcal{E}'_n = \frac{41\,890\,000}{981 \times 10^n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 55)$$

Zur Erläuterung ſei beiſpielsweiſe Folgendes bemerkt. Der Werth $\mathcal{E}'_1 = 4270$ gibt uns an, daß zur Erzeugung einer Wärmemenge, die ein Kilogramm Waſſer von $14\frac{1}{2}^0$ C. auf $15\frac{1}{2}^0$ C. zu erwärmen vermag, der Aufwand von 4270 Arbeitseinheiten erforderlich iſt, deren jede der Hebung eines mit der Beſchleunigung von 98,1 dm = 9,81 m zur Erde gravitirenden Cubikdecimeters Waſſer auf die Höhe eines Decimeters entſpricht. Eine ſolche Arbeitseinheit iſt alſo $\frac{1}{10}$ Kilogrammmeter. Der Kilogramm-Calorie entſpricht alſo als mechaniſches Aequivalent die Arbeit von 4270 Zehntel mkg = 427 mkg, wie es ſich aus Formel 52 mit Rückſicht auf die Formeln 45 und 46 unmittelbar ergibt.

Wenn eine Meteormaſſe von der Größe der kilometriſchen Maſſeneinheit (§. 12) aus dem Weltraume zur Erde fiele, ſo würde ſie vermöge des Luftwiderſtandes in der Atmoſphäre und vermöge des Stoßes gegen die Erdoberfläche eine Arbeit von 62,57 kilometriſchen Arbeitseinheiten (§. 18) verrichten, der nach den vorſtehenden Formeln über 14935 kilometriſche Calorien äquivalent wären. Für eine zur Erde fallende Kilogrammmaſſe ergeben ſich ebenſo viele Kilogramm-Calorien, d. i. nahezu 15 Tonnen-Calorien. Siehe II. Theil, §. 63.

24 **Arbeitsſtärke. Leiſtung. Effect.** Wenn man den Werth einer gethanen Arbeit nach den Darlegungen des §. 18 durch das Product Kraft ×

Weg ausdrückt, kommt die Zeit, binnen der die Arbeit gethan worden ist, nicht in Betracht. Die Arbeit von einem Kilogrammmeter ist gethan, wenn man ein Kilogrammgewicht auf die Höhe eines Meters gehoben hat, gleichviel wie schnell oder langsam, d. h. binnen welcher Zeit man dies bewerkstelligt hat. Bei der practischen Arbeitsverwerthung kommt aber auch die Zeit in Betracht, binnen der eine gewisse Arbeit verrichtet wird, und diese Betrachtung führt uns zum Begriffe der Arbeitsstärke, auch Effect oder Leistung genannt. Wir setzen jene Arbeitsstärke (man könnte vielleicht auch sagen: Arbeitsgeschwindigkeit) gleich Eins, bei der eine Arbeitseinheit in einer Zeiteinheit, also z. B. ein Erg in einer Secunde geleistet wird. Diese Einheit der Arbeitsstärken entspricht dem C-G-S-System und wird ein Secundenerg genannt, dargestellt in der Formel

$$1\ \text{Secundenerg} = 1\ (C^2\text{-}G\text{-}S^{-3}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 56)$$

Wir finden nämlich die Dimension einer Arbeitsstärke als einer auf Zeit bezogenen Arbeitsgröße, indem wir, entsprechend der Dimension des Verhältnisses $\frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}} = \frac{l^2 m t^{-2}}{t}$, den Dimensionsausdruck einer Arbeitsgröße durch das Symbol der Zeit dividiren und schreiben

$$\text{Arbeitsstärke} = (l^2 m t^{-3}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 57)$$

woraus dann die Formel 56 für das C-G-S-System unmittelbar hervorgeht.

Als practische Einheit (§. 11) im C-G-S-System dient uns, entsprechend den Darlegungen des §. 18 (Formel 45) das unter dem Namen Watt gebräuchliche Secunden-Joule $= 10^7$ Secunden-Erg, also

$$1\ \text{Watt} = 1\ \text{Secunden-Joule} = 10^7\ (C^2\text{-}G\text{-}S^{-3}) \quad . \quad . \quad 58)$$

Demnach ist leicht verständlich, daß man umgekehrt unter einer Watt-Secunde die von einem Watt in einer Secunde geleistete Arbeit, also ein Joule zu verstehen hat.

Die Arbeitsstärke, bei der in jeder Secunde die Arbeit von einem Kilogrammmeter geleistet wird, nennt man ein Secunden-Kilogrammmeter und bezeichnet sie mit $\frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$. Vergleicht man mit dieser Arbeitsstärke das Watt, so ergibt sich aus Formel 46

$$1\ \frac{\text{mkg}}{\text{sec}} = 9{,}81\ \text{Watt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 59)$$

und folglich

$$1\ \text{Watt} = 0{,}1019 \ldots \frac{\text{mkg}}{\text{sec}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 60)$$

Von den Vielfachen des Watt sind das Hectowatt $= 100$ Watt und das Kilowatt $= 1000$ Watt am häufigsten gebräuchlich, deren Werthe sich aus Formel 60 unmittelbar ergeben.

Die Arbeitsſtärke von $75 \frac{mkg}{sec}$ hat man eine Pferdeſtärke, bezeichnet mit PS, oder auch Pferdekraft genannt. Es iſt demnach

$$1\ PS = 75 \times 9{,}81\ Watt = 736\ Watt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 61)$$

alſo

$$1\ Watt = 0{,}00136\ PS = 0{,}1019 \frac{mkg}{sec} \quad . \quad . \quad . \quad 62)^{1})$$

$$1\ Hectowatt = 0{,}136\ PS = 10{,}19 \frac{mkg}{sec} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 63)$$

$$1\ Kilowatt = 1{,}36\ PS = 101{,}9 \frac{mkg}{sec} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 64)$$

Der dem neufranzöſiſchen Maßſyſtem angepaßte Werth der force de cheval im Betrage von $75 \frac{mkg}{sec}$ iſt etwas kleiner als Watt's horse-power, bezeichnet mit HP, im Betrage von 550 engliſchen Fußpfunden oder 746 Watt $= 76 \frac{mkg}{sec}$, welche Pferdeſtärke man wohl auch die engliſche oder die Birminghamer Pferdekraft zu nennen pflegt.

Damit man beurtheilen könne, welche Berechtigung die für eine Pferdeſtärke angegebenen Zahlenwerthe haben, ſei Folgendes vermerkt.

Verſuche mit guten, durchſchnittlich 525 kg ſchweren Pferden haben bei 8ſtündiger Arbeitszeit 61,2; bei 6ſtündiger 63,7; bei $4^1/_2$ſtündiger 74,7 und endlich bei 3ſtündiger Arbeitszeit 84,3 $\frac{mkg}{sec}$ für deren Arbeitsſtärke ergeben.

Die alte preußiſche Pferdekraft betrug, auf Metermaß umgerechnet, 75,36 $\frac{mkg}{sec}$ [2]).

Anſtatt der Pferdeſtärke hat Ingenieur Friedrich Drexler die dem Kilowatt (Formel 64) ſehr nahe kommende Leiſtung

$$100 \frac{mkg}{sec} = 981\ Watt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 65)$$

(vergl. Formel 59) als Leiſtungseinheit vorgeſchlagen. Von anderer Seite

---

[1]) Aus dieſen Formeln iſt auch erſichtlich, daß man eine gegebene Anzahl von Watt durch Diviſion mit 9,81 in $\frac{mkg}{sec}$ und durch Diviſion mit 736 in PS umrechnet.

[2]) Siehe den Artikel „Pferdekraft“ in Emsmann's phyſicaliſchem Handwörterbuche (1865), 2. Bd., S. 212 und Everett, Units and physical constants (1879), S. 25.

wurde darüber bemerkt, daß diese Einheit in Frankreich, und zwar mit der Benennung 1 Poncelet, schon mehrfach im Gebrauche sei[1]).

Ist die Arbeitsstärke von einem Watt eine Secunde lang wirksam, so wird innerhalb dieser Zeit, vermöge der zu Formel 58 gegebenen Definition, die Arbeit vom Betrage einer Watt-Secunde oder eines Joule verrichtet; dauert die Leistung eines Watt eine Stunde lang, so wird dabei eine Arbeit von 3600 Watt-Secunden oder Joule, die man eine Watt-Stunde nennt, verrichtet, also nach Formel 46

$$1 \text{ Watt-Stunde} = 3600 \times 0{,}1019 \doteq 367 \text{ mkg}.$$

Wenn im Allgemeinen eine Leistung von P Watt, wobei P allenfalls auch veränderlich sein kann, während der Zeit t andauert, so wird innerhalb dieser Zeit die Arbeit

$$L = \int_0^t P e l t \quad \ldots \ldots \ldots \quad 66)$$

verrichtet, die in Watt-Stunden (im Betrage von $3600 \times 0{,}1019 = 367$ mkg) oder in Watt-Secunden oder Joule (im Betrage von 0,1019 mkg[1]) ausgedrückt ist, je nachdem man t Stunden oder Secunden bedeuten läßt.

Hat man als Einheit von P eine Pferdestärke angenommen, so gibt die Formel 66 je nach der Bedeutung von t entweder Pferdekraft-Stunden (im Betrage von $3600 \times 75 = 270000$ mkg, häufig bezeichnet mit HPH = horse-power-hour) oder Pferdekraft-Secunden (im Betrage von 75 mkg).

Fließt beim Gefälle e in einem Zeitelemente dt das Wassergewicht idt ab, so hat diese Bewegung innerhalb der Zeit t den Arbeitswerth

$$L = \int_0^t e i dt \quad \ldots \ldots \ldots \quad 67)$$

dessen Größe und Benennung von den Einheiten abhängt, nach denen man e und i gemessen hat.

Auf dem Gebiete der Electricität begegnen wir einem analogen Ausdrucke für die Arbeit eines Stromes i bei der Spannung e in der Zeit t. (§. 50, Formel 150.)

Wir haben die Leistungseinheit des C-G-S-Systems unter dem Namen Secunden-Erg $= 10^{-7}$ Watt (siehe die Formeln 56 und 58) kennen gelernt. Für das D-K-S-System und das M-T-S-System ergeben sich hieraus nach dem im §. 18 über die betreffenden Arbeitseinheiten Gesagten die Leistungseinheiten $\frac{1}{100}$ Watt und 1000 Watt = 1 Kilowatt und endlich für das

[1]) Zeitschrift für Electrotechnik, 1899, S. 529 und 1900, S. 248.

kilometriſche Syſtem die Leiſtungseinheit von 10^{18} Watt $= 10^{15}$ Kilowatt, eine Arbeitsſtärke, die mehr als das Zwanzigmillionenfache der Geſammtleiſtung ſämmtlicher Dampfmaſchinen der Welt, wenn ſie gleichzeitig arbeiten würden, ausmacht [1]).

II.

Magnetiſche Maße.

25 **Magnetiſche Quantität.** Die Dimenſion (Verwandlungszahl) für eine magnetiſche Menge μ haben wir ſchon in §. 8 erörtert und dafür den Ausdruck

$$(\mu) = l^{3/2} m^{1/2} t^{-1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 68)$$

erhalten.

Wir nehmen als Einheit der magnetiſchen Mengen eine ſolche an, die in einem Punkte concentrirt gedacht, auf eine gleich große, ebenfalls in einem Punkte concentrirt gedachte, im Abſtande gleich der Längeneinheit befindliche eine abſtoßende oder anziehende Wirkung gleich der Krafteinheit ausübt. Zwei, dem C-G-S-Syſtem entſprechende, magnetiſche Quantitätseinheiten würden alſo im Abſtande eines Centimeters mit der Kraft einer Dyne aufeinander wirken.

Wir definiren dieſe Qualitätseinheit in der Form

$$\text{Magnetiſche Quantitätseinheit} = 1\,[C^{3/2} G^{1/2} S^{-1}] \quad \ldots \quad 69)$$

Auf das Gaußiſche Mm-Mg-Sec-Syſtem umgerechnet (nach Formel 16 und 17) entſpricht dieſe Einheit 1000 Gaußiſchen Quantitätseinheiten.

26 **Magnetiſches Moment.** Aus dem Vorhergehenden ergibt ſich unmittelbar die Dimenſion eines magnetiſchen Momentes M, das bekanntlich durch einen Ausdruck von der Form $\Sigma \mu \delta$, wobei δ eine Länge (Projection der Poldiſtanz eines magnetiſchen Molecüls auf die magnetiſche Axe des Magnetſtabes) bedeutet, oder, bezüglich einer Coordinatenaxe, durch $M_x = \int x \, d\mu$ vorgeſtellt wird. Die Summe $(\Sigma \mu \delta)$ hat aber dieſelbe Dimenſion wie jedes Glied $(\mu \delta)$ derſelben, oder das Integral die Dimenſion eines Integralelementes, alſo wird

$$(M) = (\Sigma \mu \delta) = l^{3/2} m^{1/2} t^{-1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 70)$$

Ein magnetiſches Moment gleich der Einheit hätte ein Magnet von der

---

[1]) Hier haben wir [nach einer Angabe des Brockhaus'ſchen Converſationslexicons im Artikel „Dampfmaſchine", Bd. 4 (1898), S. 744] den Geſammt-Effect ſämmtlicher Dampfmaſchinen der Welt = 60 Millionen Pferdeſtärken, alſo in runder Zahl = 44 Millionen Kilowatt angenommen.

Poldistanz eines Centimeters mit je einer nördlichen und südlichen magnetischen Quantitätseinheit (s. Formel 69) in den beiden Polen.

Diese Einheit wird definirt durch

$$\text{Einheit der magnetischen Momente} = 1\,[C^{1/2}G^{1/2}S^{-1}] \quad . \quad . \quad 71)$$

Die auf die Volumseinheit eines Magnetstabes entfallende Anzahl von Momenteinheiten heißt specifischer Magnetismus. Dieser wird, wenn wir uns den Magnetstab nicht als magnetisch gesättigt denken, an verschiedenen Stellen im Inneren des Stabes verschieden sein. Wir können aber auch einen Durchschnittswerth in Betracht ziehen, indem wir das magnetische Moment des Stabes durch dessen Volumen dividiren und schreiben $s = \frac{M}{v}$.

Dem specifischen Magnetismus s entspricht also die Dimension $l^{3/2}m^{1/2}t^{-1} : l^3 = l^{-1/2}m^{1/2}t^{-1}$, somit

$$(s) = l^{-1/2}m^{1/2}t^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 72)$$

Für das Maximum des specifischen Magnetismus, das ich mit $\bar{s}$ bezeichnen und magnetische Capacität nennen will, haben verschiedene Forscher ungleiche Werthe gefunden, von denen jedoch nur wenige unter 1400 oder über 1700 liegen. Im Jahre 1869 habe ich aus den damals vorliegenden electromagnetischen Untersuchungen von J. Müller, W. Weber, Dub, Waßmuth und von mir selbst den Mittelwerth 1653 berechnet.

Die Zahl $4\pi s = 4\pi\frac{M}{v}$ gibt die Zahl der Kraftlinien[1]) pro Flächeneinheit, die man sich im Inneren des Magnetstabes von Pol zu Pol verlaufend denkt; im Maximum würde also diese Zahl nach den vorstehenden Angaben $4\pi \times 1700$, also etwas über 21 000 betragen[2]). Denkt man sich in jedem Pole des Magnetstabes die magnetische Quantität $\pm q$ concentrirt, so bedeutet $4\pi q$ die Gesammtzahl der Kraftlinien, die im Inneren des Stabes von Pol zu Pol gehen.

Man nennt die soeben definirte Quantität q wohl auch die Polstärke. Denkt man sich diese Quantität je eines Poles auf der betreffenden Endfläche f des Magnetstabes von der Länge l gleichförmig ausgebreitet, so kann man auch $M = lq$ setzen, oder $M = \frac{lfq}{f} = \frac{vq}{f}$, woraus $\frac{M}{v} = \frac{q}{f} = \sigma$ folgt, welche Größe σ man auch Flächendichte nennt. Es ist also annähernd $s = \sigma$, wenn nämlich die Magnetisirungsrichtung auf der Polfläche (f) senkrecht ist[3]). — Genauer ist es als Poldistanz nicht l (wie in der Gleichung

[1]) Siehe §. 29.

[2]) Nimmt man $s = 1653$, so erhält man $4\pi s = 20772$.

[3]) Wir kommen im II. Theile mit weiteren Ausführungen darauf zurück. (§. 65 und §. 82, Erläuterungen zu den Formeln 266 und 267.)

$M = lq$), ſondern etwa $\frac{5}{6} l$ anzunehmen, wobei man unter den Polen des Magnetſtabes die Angriffspunkte der Reſultirenden der erdmagnetiſchen Parallelkräfte zu verſtehen hat.

27 **Potentialfunction und Niveauflächen.** Um die Dimenſion eines magnetiſchen Potentials V zu finden, berückſichtigen wir die Formel

$$V = \int \frac{dq}{r} \quad \text{oder} \quad V = \sum \frac{\mu}{r}$$

für den Werth der Potentialfunction[1]) und erſehen daraus, daß wir die Dimenſion eines Potentials aus jener einer Quantität (μ) durch Diviſion durch eine Länge, $(r) = l$, erhalten, alſo

$$(V) = \left(\int \frac{dq}{r}\right) = \left(\sum \frac{\mu}{r}\right) = l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 73)$$

Hier bedeutet dq eine unendlich kleine auf einem Flächenelemente oder in einem Raumelemente angenommene magnetiſche Quantität im Abſtande r vom afficirten Punkte und μ eine in einem Punkte concentrirt gedachte magnetiſche Quantität im Abſtande r vom afficirten Punkte.

Denkt man ſich etwa in der Umgebung eines Magnetſtabes die Punkte aufgeſucht, in denen die Potentialfunction einen und denſelben beſtimmten Werth, z. B. $V = a$, hat, und durch alle dieſe Punkte eine Fläche gelegt, ſo erhält man eine ſogenannte Niveaufläche, nämlich jene, deren Gleichung (da V eine Function der Raumcoordinaten) $V = a$ iſt. Ebenſo können wir uns Niveauflächen für die Potentialwerthe $V = b$, $V = c$ u. ſ. w. conſtruirt denken.

Die Punkte, in denen der Erdkörper von Niveauflächen des magnetiſchen Potentials (der Erde) berührt wird, nennt man magnetiſche Pole. In dieſen iſt die Inclination $= 90^0$. Dieſe Punkte ſind jedoch verſchieden von jenen, die ein Intenſitätsmaximum des Erdmagnetismus aufweiſen.

28 **Intenſität eines magnetiſchen Feldes. Feldſtärke.** Einen Raum, in dem magnetiſche Kräfte wirkſam ſind, nennt man ein „magnetiſches Feld“. Alle magnetiſchen Körper, zu denen wir auch unſere Erde rechnen müſſen, ſind alſo von magnetiſchen Feldern umgeben. Befindet ſich in einem ſolchen ein mit einer gewiſſen magnetiſchen Quantität μ (die wir im Allgemeinen als nördlich magnetiſch annehmen wollen) behaftetes Theilchen, ſo wird dieſes in der Richtung der Reſultirenden der auf daſſelbe wirkenden magnetiſchen Kräfte mit einer Kraft vom Betrage

$$F \cdot \mu = -\frac{dV}{dn} \cdot \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 74)$$

[1]) Siehe den II. Theil, §. 82.

angetrieben. Dabei bedeutet dV die Zunahme des magnetischen Potentialwerthes, die stattfindet, wenn man von dem Punkte P, in dem sich das betrachtete magnetische Theilchen befindet, auf einen anderen Punkt P' übergeht, der auf der Richtung der besagten Resultirenden[1]) um die unendlich kleine Strecke dn von jenem entfernt ist. Die auf die Quantitätseinheit ($\mu = 1$) des afficirten magnetischen Theilchens wirkende Kraft

$$F = -\frac{dV}{dn} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 75)$$

nennt man die Intensität des magnetischen Feldes oder Feldstärke an der betrachteten Stelle (P) und in Bezug auf die betrachtete Richtung[2]) (dn). Ebenso findet man die Feldstärke $F_{(s)}$ in demselben Punkte für jede andere Richtung (s) des Raumes gegeben durch den negativen Differentialquotienten der Potentialfunction nach dieser Richtung[3]), nämlich:

$$F_{(s)} = -\frac{dV}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 76)$$

Ein magnetisches Feld heißt homogen, wenn die Feldstärke in allen Punkten des Feldes gleich stark und gleich gerichtet ist.

Das magnetische Feld der Erde kann innerhalb unserer Beobachtungsräume, falls keine störenden Eisenmassen oder Magnete vorhanden sind, als homogen angesehen werden.

Die Dimension einer magnetischen Feldstärke erhält man, indem man die Dimension von dV durch jene von dn dividirt. Erstere ist dieselbe, wie die einer Potentialfunction selbst, letztere ist die einer Länge. Man erhält also mit Rücksicht auf Formel 73

$$(F) = \frac{[l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}}{l} = l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1} \quad \ldots\ldots \quad 77)$$

Die Einheit der Feldstärken im C-G-S-System oder

$$\text{Einheit der magnetischen Kraft} = 1\ [C^{-1/2} G^{1/2} S^{-1}] \quad \ldots \quad 78)$$

---

[1]) Diese Richtung ist zugleich die Richtung der Normale auf der durch den Punkt P gehenden Niveaufläche oder auch die Richtung der Tangente zu der diese Niveaufläche im Punkte P durchsetzenden Kraftlinie (s. §. 29).

[2]) Man nennt diese auf die Richtung der Resultirenden der magnetischen Kräfte bezogene Feldintensität auch die totale, zum Unterschiede von den auf andere Richtungen des Raumes bezogenen Componenten derselben. So unterscheiden wir ja auch beim Erdmagnetismus eine totale, eine horizontale und eine verticale Feldintensität.

[3]) Das Vorzeichen minus läßt uns erkennen, daß der Antrieb auf ein nördlichmagnetisches Theilchen in der Richtung der abnehmenden Potentialwerthe stattfindet, vorausgesetzt, daß wir nördlich-magnetische Quantitäten bei der Bildung der Function V (Formel 73) als positive in Rechnung bringen.

ist also jene magnetische Feldstärke, die auf die magnetische Quantitätseinheit 1 [$C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}$] mit der Kraft einer Dyne einwirkt.

Beispiel. Nach dieser Einheit gemessen ist die erdmagnetische Horizontalintensität für Wien in runder Zahl = 0,2, oder auf die $10^{-\frac{1}{2}}\ 1000^{\frac{1}{2}}$ mal, d. i. 10 mal kleinere Einheit des Gauß'schen Systems bezogen, ungefähr = 2. Die totale erdmagnetische Intensität auf der Erdoberfläche ist verschieden etwa innerhalb der Grenzen von 0,3 und 0,7 C-G-S-Einheiten.

29 **Kraftlinien.** Wenn es möglich wäre, ein magnetisches Theilchen herzustellen, das nur nördlichen oder nur südlichen Magnetismus enthält[1]), so würde es, wenn es sich frei beweglich in einem magnetischen Felde befände, da es weder als träge, noch als schwer angenommen wird, eine Bahn beschreiben müssen, die alle Niveauflächen normal („senkrecht") durchschneidet und daher so beschaffen ist, daß in jedem Punkte dieser Bahn die Tangente derselben die Kraftrichtung anzeigt[2]). Eine solche Bahnlinie nennt man eben deßhalb auch „Kraftlinie".

Die Niveauflächen in einem homogenen magnetischen Felde (siehe §. 28) müssen also parallele Ebenen sein, die für gleich große Potentialdifferenzen in gleichen Abständen aufeinanderfolgen und von parallelen, geraden Kraftlinien senkrecht durchsetzt werden.

Da jedem Punkte eines magnetischen Feldes eine durch diesen Punkt gehende Kraftlinie entspricht, so gibt es in jedem magnetischen Felde thatsächlich unendlich viele Kraftlinien. Wenn es dennoch üblich geworden ist, die Feldstärke mit der „Zahl der Kraftlinien" in Zusammenhang zu bringen, so kann dies also nur auf einer willkürlich vereinbarten Definition und Darstellungsweise beruhen.

Man denkt sich nämlich ein magnetisches Feld so gezeichnet oder im Modell dargestellt, daß man an jeder Stelle desselben so viele Kraftlinien auf ein Quadratcentimeter der durchsetzten Niveaufläche annimmt, als die Feldstärke daselbst Einheiten beträgt.

Hätte man also z. B. an einer Stelle des magnetischen Feldes zwischen den Polflächen eines Electromagneten (etwa durch einen Inductionsversuch und Vergleich mit dem Erdinductor[3]) die Feldstärke = 400 ($C^{-\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}$) gefunden,

---

[1]) Bekanntlich ist dies nicht möglich, da jedes Theilchen, das eine gewisse Quantität nördlichen Magnetismus enthält, stets ebenso viel südlichen Magnetismus besitzt, und diese Quantitäten nicht getrennt dargestellt werden können.

[2]) Siehe die erste Anmerkung zu §. 28.

[3]) Wird eine Drahtschleife vom Flächeninhalte f aus dem magnetischen Felde von der Intensität h plötzlich entfernt und ein anderes Mal ein Erdinductor von der Windungsflächensumme F aus einer zum magnetischen Meridian senkrechten Anfangsstellung um eine verticale Axe um 180° umgelegt, und sind endlich α und β

so hätte man sich vorzustellen, daß an dieser Stelle 400 Kraftlinien pro Quadratcentimeter oder 4 Kraftlinien pro Quadratmillimeter die betreffende Niveaufläche durchsetzen.

Von einer Quantitätseinheit gehen, wie später gezeigt werden soll, 4π Kraftlinien aus, folglich $4\pi q$ von der Quantität q, wie wir schon im §. 26 vorausgesetzt haben. Die Begründung folgt im II. Theile, §. 82, Erläuterung zu Formel 264.

Den Verlauf der Kraftlinien denkt man sich bei einem Magnetstabe außerhalb desselben vom Nordpole zum Südpole und innerhalb desselben vom Südpole zum Nordpole gerichtet.

Magnetisches Drehungsmoment. Befindet sich ein Magnetstab vom 30
magnetischen Momente M in einem homogenen magnetischen Felde von der Intensität F in solcher Lage, daß die magnetische Axe zur Kraftrichtung (also zu den parallelen Kraftlinien) des homogenen magnetischen Feldes senkrecht ist, so wirkt auf den Stab ein Drehungsmoment $D = FM$, dem vermöge der Formeln 77 und 73 die Dimension

$$(D) = (FM) = [l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1}] \,.\, [l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}] = l^2 m t^{-2}$$

entspricht. Der letzte Ausdruck $l^2 m t^{-2} = l\,[l m t^{-2}]$ bedeutet überhaupt ein Drehungsmoment, denn ein Factor $l m t^{-2}$ desselben bedeutet nach Formel 11 eine Kraft und der andere eine Länge, nämlich den Hebelarm des auf den Magnetstab wirkenden Kräftepaares. Dieses Drehungsmoment ist das größte, das die vorhandenen magnetischen Kräfte auf den gegebenen Stab ausüben können; man erhält es auch durch Multiplication der in einem Pole des Stabes concentrirt gedachten magnetischen Quantität $[l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}]$ mit der Intensität des magnetischen Feldes $[l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1}]$ und mit der Poldistanz $[l]$. Das Product der beiden ersten Factoren gibt die Intensität der in einem Pole angreifenden magnetischen (z. B. erdmagnetischen) Kraft.

Beispiele. Für einen Magnetstab von 1 Kilogramm Gewicht, der zu einem durchschnittlichen Momente von 40 C-G-S-Einheiten pro Gewichtseinheit (Gramm) magnetisirt ist, würde sich, wenn nur die horizontale Componente $H = 0{,}2$ des Erdmagnetismus drehend auf ihn wirken kann (wie z. B. bei einem Magnetometer), ein größtes Drehungsmoment $= 40 \times 1000 \times 0{,}2 = 8000$ ergeben, entsprechend einem Kräftepaare, in dem je 8000 Dyn, also $8000 \times 0{,}001019 = 8{,}152$ Gramm, an den Enden eines Hebelarmes von 1 Centimeter Länge wirken.

---

die in beiden Fällen an einem im gemeinschaftlichen Stromkreise befindlichen Schwingungsgalvanometer bewirkten Ausschläge, so ist $h = 2H \cdot \frac{F}{f} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$, wenn H die erdmagnetische Horizontalintensität bedeutet.

Einem kleinen Magnetſtabe vom Momente 1166 entſpricht bei derſelben erdmagnetiſchen Horizontalkraft 0,2 ein größtes Drehungsmoment von $1166 \times 0{,}2 = 233{,}2$ Centimeter-Dyn oder $233{,}2 \times 0{,}001019 = 0{,}238$ Centimeter-Gramm.

Die Einheit für Drehungsmomente überhaupt und für magnetiſche insbeſondere entſpricht im C-G-S-Syſtem einem Kräftepaare, in dem je 1 Dyn an den Enden eines Hebelarmes von 1 Centimeter (in entgegengeſetzten Richtungen) angreift, alſo

$$\text{Einheit der Drehungsmomente} = 1\ [C^2 G S^{-2}] \quad . \quad . \quad 79)$$

III.

Electroſtatiſche Maße.

31 **Electricitätsmenge.** Gleichwie für eine magnetiſche Menge iſt auch für eine Electricitätsmenge die Dimenſion (Verwandlungszahl) im §. 8 auf Grundlage des Coulomb'ſchen Geſetzes bereits abgeleitet worden, nämlich gegeben durch den Ausdruck $(\mu) = l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}$ oder

$$(\varepsilon) = l^{3/2} m^{1/2} t^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 80)$$

wenn wir magnetiſche Quantitäten mit μ und electriſche mit ε in der Bezeichnung unterſcheiden wollen.

Als Einheit der Electricitätsmengen nehmen wir im Sinne des Coulomb'ſchen Geſetzes jene an, die, in einem Punkte concentrirt gedacht, auf eine ebenſolche, gleich große, im Abſtande der Längeneinheit befindliche, eine abſtoßende oder anziehende Wirkung gleich der Krafteinheit ausübt. Zwei dem C-G-S-Syſteme entſprechende Electricitätseinheiten würden alſo im Abſtande eines Centimeters mit der Kraft einer Dyne aufeinander wirken. Dieſe Electricitätsmenge definiren wir in der Form

$$\text{Electroſtatiſche Electricitätseinheit} = 1\ [C^{3/2} G^{1/2} S^{-1}] \quad . \quad . \quad 81)$$

Auf das *M*m-Mg-Sec-Syſtem umgerechnet (nach Formel 17) entſpricht dieſe Einheit 1000 Einheiten.

Dieſe Einheit iſt, wenn wir ſie nach dem Maßſtabe anſchaulicher Erſcheinungen ſchätzen, außerordentlich klein, denn es müßten z. B. bei einer Waſſerzerſetzung über 32 Tauſend Millionen ſolcher Einheiten durchgeleitet werden, um 1 Milligramm Waſſer zu zerlegen, und mindeſtens 30 Millionen ſolcher Einheiten ungefähr müſſen in jeder Secunde durch die Drahtwindungen eines Morſe-Relais geſchickt werden, um daſſelbe in Thätigkeit zu ſetzen. Die

Ladungen unserer Leydener Flaschen können Hunderttausende und wohl auch Millionen von solchen Einheiten betragen.

Mechanisches Strommaß. Unter Stromstärke nach electrostatischem, 32
oder, wie man auch sagt, nach mechanischem Maße versteht man die nach electrostatischen Einheiten gemessene Electricitätsmenge, die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters geht. Ihre Dimension ist also

$$(I) = l^{3/2} m^{1/2} t^{-1} : t = l^{3/2} m^{1/2} t^{-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 82)$$

woraus weiterhin folgt:

$$\text{Mechanische (oder electrostatische) Stromeinheit}^{1}) = 1\ [C^{3/2} G^{1/2} S^{-2}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 83)$$

Beispiel. Aus den oben (bei Formel 81) angeführten Beispielen geht hervor, daß der zum Ansprechen eines Relais erforderliche Strom nach electrostatischem Maße gemessen ungefähr die Intensität = 30 Millionen haben müßte, woraus hervorgeht, daß die mechanische Stromeinheit verhältnißmäßig sehr klein ist.

Electrostatisches Potential und electrisches Feld. Durch Wieder- 33
holung der bei den magnetischen Maßen bereits durchgeführten Schlußfolgerungen finden wir ganz analog für das electrische Potential die Dimensionsformel

$$(V) = \left(\int \frac{dq}{r}\right) = \left(\sum \frac{\varepsilon}{r}\right) = l^{1/2} m^{1/2} t^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 84)$$

wobei dq eine unendlich kleine Menge der beobachteten, z. B. auf einem Leiter vorhandenen Electricität und ε eine in einem Punkte concentrirt gedachte Electricitätsmenge bedeutet, während r in beiden Fällen den Abstand (des dq oder des ε) vom afficirten Punkte vorstellt. Vergl. §. 27.

Für die Intensität eines electrischen Feldes ergibt sich

$$(F) = \left(-\frac{dV}{dn}\right) = l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 85)$$

---

[1]) Da ein electrischer Strom kein statischer Zustand, sondern ein dynamischer Vorgang ist, hat der Ausdruck: „electrostatische Stromeinheit" nur den Sinn, daß die durch den Querschnitt des Leiters gehenden Electricitätsmengen als nach electrostatischem Maße gemessen vorausgesetzt werden. Dabei hätte man sich im Sinne der dualistischen Hypothese einen Strom von der Stärke I nach mechanischem Maße in der Art vorzustellen, daß in einer Secunde $\frac{I}{2}$ positive Electricitätseinheiten in der einen und gleichzeitig ebenso viele negative Electricitätseinheiten in der entgegengesetzten Richtung durch den betrachteten Querschnitt des Leiters gehen. Die erstere Richtung heißt die Stromrichtung. Der mechanischen Stromeinheit entspricht die Bewegung von 15×10^9 positiven $C^{3/2} G^{1/2} S^{-1}$-Einheiten in der einen und gleichzeitig ebenso vielen negativen in der entgegengesetzten Richtung in jeder Secunde. Siehe übrigens §. 52, letzte Anmerkung.

Formel 84 gibt für die

$$\text{Electroſtatiſche Potentialeinheit} = 1\,[C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}] \quad . \quad . \quad 86)$$

Um eine Vorſtellung von der Größe dieſer Einheit, die 300 Volt (§. 46) ausmacht, zu geben, ſei bemerkt, daß eine Potentialdifferenz von wenigen electroſtatiſchen Einheiten des C-G-S-Syſtems ſchon hinreichend iſt, um eine merkliche Funkenbildung zwiſchen abgerundeten Spitzen zu veranlaſſen, wenn dieſe einander auf eine Entfernung von weniger als 1 Millimeter genähert werden. Die Potentialwerthe der gewöhnlichen Ladungen unſerer Reibungselectriſirmaſchinen werden nach Hunderten ſolcher Spannungseinheiten gemeſſen. Weiteres im II. Theile, §. 85.

34 **Capacität.** Iſt die Electricitätsmenge Q erforderlich, um einen Leiter (z. B. eine iſolirte Metallkugel) ſo zu laden, daß die Ladung den Potentialwerth V erreicht, ſo nennt man die Größe

$$K = \frac{Q}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 87)$$

die Capacität des Leiters. Dieſer entſpricht vermöge der Formeln 80 und 84 die Dimenſion $[l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}] : [l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}]$, alſo

$$(K) = \left(\frac{Q}{V}\right) = l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 88)$$

indem man nämlich die Dimenſion einer Electricitätsmenge durch die Dimenſion eines Potentialwerthes dividirt.

Als Capacitätseinheit wird im Sinne der Formel 87 die Capacität eines Leiters zu gelten haben, der mit der Electricitätsmenge $= 1$ zum Potentialwerthe $= 1$ geladen wird.

Im C-G-S-Syſtem iſt dieſe Capacitätseinheit angezeigt durch die Formel

$$\text{Electroſtatiſche Capacitätseinheit} = 1\,[C] \quad . \quad . \quad . \quad 89)$$

Auf dieſe Einheit bezogene Capacitäten werden alſo in Centimetern ausgedrückt. In der That iſt z. B. für einen kugelförmigen Leiter vom Radius R der Werth der Potentialfunction auf der Kugeloberfläche $V = \frac{Q}{R}$, wenn Q die Ladung bedeutet. Es iſt demnach die Capacität der Kugel $K = \frac{Q}{V} = R$, wobei man ſich den Radius in Centimetern ausgedrückt denken muß, um die Capacität im C-G-S-Syſtem zu erhalten [1]).

[1]) Die Capacität einer unendlich dünnen kreisförmigen Scheibe vom Radius R iſt $= R : \frac{\pi}{2} = \frac{2R}{\pi}$, verhält ſich alſo zur Capacität einer Kugel von gleichem Radius wie $\frac{2}{\pi} : 1$. (Vergl. Wüllner, Experimentalphyſik, 3. Bd., 5. Aufl., S. 245.)

Die Capacität kann nach dem Vorhergehenden auch als die Electricitätsmenge definirt werden, die erforderlich ist, um einen Leiter so zu laden, daß die electrische Spannung auf demselben den Potentialwerth 1 erreiche. Bei einem kugelförmigen Leiter sind also hierzu ebenso viele Electricitätseinheiten erforderlich, als der Halbmesser der Kugel Centimeter enthält. Es würde sonach beispielsweise die Electricitätsmenge $32 \cdot 10^9$, die erforderlich ist, um ein Milligramm Wasser zu zerlegen, hinreichend sein, um eine Kugel von der Größe der Erde (Radius $= 637 \cdot 10^6$ Centimeter) ungefähr zum Potential 50 zu laden.

Condensatoren. Die Capacität eines isolirten Leiters A wird erhöht, 35
wenn man einen anderen Leiter B (oder mehrere andere Leiter) in seine Nähe bringt. In Folge der in diesem Falle auf dem Leiter B eintretenden electrischen Vertheilung wird nämlich der Werth V der Potentialfunction auf dem mit der Electricitätsmenge q geladenen Leiter A vermindert, z. B. von V auf v, und der Leiter A dadurch befähigt, eine größere Electricitätsmenge Q aufzunehmen, bis das frühere Ladungspotential V wieder erreicht ist. Die Capacität des Leiters A ist also durch die Annäherung des Leiters B von $k = \frac{q}{V}$ auf $K = \frac{q}{v} = \frac{Q}{V}$, also im Verhältnisse $\frac{Q}{q} = \frac{V}{v}$ erhöht worden.

Auf diesem Principe beruhen die Ansammlungsapparate oder Condensatoren, von denen z. B. die Franklin'sche Tafel und die Leydener Flasche aus den Anfangsgründen der Physik bekannt sind. Sie bestehen aus einem durch Mittheilung electrisirten Leiter A (innere Belegung der Leydener Flasche) und einem durch Vertheilung electrisirten Leiter B (äußere Belegung).

Denkt man sich einen kugelförmigen Leiter vom Radius r_1 cm, der also die Capacität r_1 besitzt, umschlossen von einer gleichfalls leitenden concentrischen Kugelschale vom inneren Radius r_2 cm, so erhält man die Vorstellung von einer kugelförmigen „vollkommenen" Leydener Flasche, d. h. von einer solchen, bei der der Leiter A vom Leiter B ganz eingeschlossen ist, wobei wir uns den kugelschalenförmigen Zwischenraum von der Dicke $r_2 - r_1$ zwischen den beiden Leitern, das sogenannte Diaphragma, aus einem Isolator bestehend denken. Bei dieser Anordnung[1]) bilden die Oberfläche der einge-

[1]) In Wirklichkeit kann eine solche Leydener Flasche nur annähernd hergestellt werden, da die Kugelschale B durchbrochen sein muß, um einen zur Ladung der eingeschlossenen Kugel A dienenden Draht einzuführen. Beide Leiter können allenfalls durch Hartgummi-Säulchen, die im Diaphragma angebracht sind, im Abstande $r_2 - r_1$ voneinander getrennt erhalten werden. Ist z. B. $r_1 = 10$ cm; $r_2 = 12$ cm, und besteht das Diaphragma aus einer Luftschichte, so ist die Capacität der Kugel A allein $= 10$, die Capacität der von der Kugelschale B umschlossenen Kugel A hin-

schlossenen Kugel und die innere Grenzfläche der einschließenden Kugelschale die beiden Ladungsflächen eines Condensators, und zwar im vorliegenden besonderen Falle eines sogenannten Kugelcondensators von der Capacität

$$K = \frac{r_2 r_1 i}{r_2 - r_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 90)$$

wobei i eine vom Materiale des Diaphragmas abhängige Constante bedeutet, die man Dielectricitätsconstante genannt hat und die wir im Folgenden wohl Vertheilungszahl nennen wollen [1]). Für Luft ist $i = 1$ angenommen, und ein Condensator heißt in diesem Falle ein Luftcondensator.

Wenn die Differenz $r_2 - r_1 = \delta$ sehr klein, also nahezu $r_1 = r_2$ ist, geht der vorstehende Ausdruck für K in $\frac{r_1^2 i}{\delta}$ oder $\frac{4\pi r_1^2 i}{4\pi\delta}$ über, und man erhält, wenn man die zur Aufnahme der Ladung bestimmte Oberfläche $4\pi r_1^2$ der Kugel A, also die Fläche der sogenannten inneren Belegung [2]) des Kugelcondensators, mit a bezeichnet, die für verhältnißmäßig kleine δ practisch brauchbare Näherungsformel

$$K = \frac{a i}{4\pi\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 91)$$

die zunächst für einen Condensator von der Form der Franklin'schen Tafel, d. i. für einen sogenannten Platten-Condensator und somit auch für die in der Technik verwendeten aus paraffinirtem Papier mit Stanniolbelegungen hergestellten Condensatoren Geltung hat, wenn man a gleich der einseitigen Belegfläche und δ gleich der Dicke des Diaphragmas nimmt.

Vergleicht man die ursprüngliche Capacität r_1 der Kugel A mit der durch Anbringung der sie einschließenden Kugelschale B vergrößerten Capacität $\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$ wobei wir in der Formel 90 die Vertheilungszahl $i = 1$ annehmen und also

---

gegen nach Formel 90 $= \frac{12 \times 10}{12 - 10} = 60$. Die Näherungsformel 91 ist hier wegen der Dicke des Diaphragmas nicht anwendbar. Hätte man anstatt Luft Paraffin als Diaphragma angewendet, so wäre die Capacität des Condensators, wenn man für die Vertheilungszahl des Paraffins nach Boltzmann $i = 2{,}32$ annimmt, $= 60 \times 2{,}32 = 139{,}2$ geworden. Die Verstärkungszahl dieses Condensators wäre $= \frac{12}{12 - 10} = 6$. Siehe die Bemerkungen nach Formel 91.

[1]) Näheres hierüber im II. Theile, §. 87.

[2]) Da die in Wechselwirkung stehenden Leiter A und B bei den ältesten Condensatoren (Franklin'sche Tafel und Leydener Flasche) aus Stanniolblättern bestehen, mit denen das als Diaphragma dienende Glas beiderseits belegt ist, so hat man die Bezeichnung „Belegungen" später allgemein auf die in Wechselwirkung stehenden Leiter A und B eines Condensators, oder vielmehr auf die einander gegenüberliegenden Ladungsflächen derselben angewendet.

das Diaphragma als aus Luft bestehend voraussetzen, so erhält man für das Verhältniß dieser beiden Capacitäten, d. i. für die sogenannte **Verstärkungszahl**, den Werth $\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} : r_1 = \frac{r_2}{r_2 - r_1}$. Aus der Formel 91 würde sich mit Rücksicht auf $a = 4\pi r_1^2$ und $\delta = r_2 - r_1$ die Verstärkungszahl $= \frac{r_1}{r_2 - r_1}$ ergeben, was wegen der angenommenen Kleinheit von δ von dem aus Formel 90 abgeleiteten Werthe wenig abweicht.

Für einen **Cylinder-Condensator**, dessen Ladungsflächen coaxiale Cylinderflächen sind, deren Radien r_1 und r_2 und deren gemeinschaftliche Länge L sein mag, ist die Capacität gegeben durch die Formel

$$K = \frac{Li}{2\,lgn\,\frac{r_2}{r_1}} = \frac{Li}{4{,}6\,log\,\frac{r_2}{r_1}} = \frac{Li}{4{,}6\,log\,\frac{d_2}{d_1}} \quad \ldots \quad 92\,[1])$$

wobei i wieder die Vertheilungszahl bedeutet. Ist das Diaphragma sehr dünn, so kann auch auf den Cylindercondensator die Näherungsformel 91 angewendet werden, indem man $a = L\pi d_1$ und $d_2 - d_1 = 2\delta$ einsetzt [2]). Bei Kabeln und meist auch bei isolirten Drähten (von denen sogleich die Rede sein soll) ist dies jedoch nicht zulässig, da die Dicke δ des Diaphragmas nicht verhältnißmäßig klein ist.

Ein langer isolirter Draht (z. B. mit Guttapercha umpreßter Kupferdraht) zeigt, als Telegraphenleitung verwendet, bekanntlich Ladungserscheinungen und kann in der That als ein Cylindercondensator angesehen werden, bei dem der Draht die innere und die die isolirende Hülle von außen umgebenden Leiter die äußere Belegung darstellen. Dies gilt auch für die transatlantischen Telegraphenkabel, deren Capacität etwa 161700 electrostatische Einheiten [3]) pro Kilometer beträgt, also für eine Länge von rund 4000 km nahezu 647 Millionen electrostatische Einheiten. Demnach ist die Capacität eines solchen Kabels mit der einer Kugel wie unsere Erde (637 Millionen, entsprechend dem Radius $= 637 . 10^6$ cm) ungefähr von gleicher Größe.

In vielen Fällen lassen sich die vorstehenden Formeln auch auf Leydener Flaschen anwenden, wenn nämlich eine geometrisch regelmäßige Gestalt und gleichmäßige Dicke des Diaphragmas die Anwendung so einfacher Rechnungen möglich machen.

---

[1]) Der Coëfficient im Nenner ist $2\,lgn\,10 = 2 \times 2{,}30258\ldots$; im dritten Ausdrucke ist das Verhältniß $\frac{d_2}{d_1}$ der Durchmesser statt dem der Radien $\frac{r_2}{r_1}$ eingesetzt.

[2]) Siehe II. Theil, §. 86.

[3]) D. i. $^1/_9$ Microfarad oder 300000 electrostatische Einheiten pro Knoten, wobei wir 1 Knoten = 1855,3 Meter annehmen. Siehe Schluß des §. 89.

Es sei z. B. eine cylindrische Leydener Flasche von 10 cm innerem Durchmesser und 16 cm Höhe der Belegung gegeben. Die belegte Bodenfläche kann dann $= 78{,}5\ \text{cm}^2$, die Mantelfläche $= 502{,}4\ \text{cm}^2$, und also die ganze innere Belegfläche $a = 580{,}9\ \text{cm}^2$ angenommen werden. Bringt man ferner $\delta = 0{,}2$ cm als durchschnittliche Dicke des Diaphragmas und $\varepsilon = 6$ als Vertheilungszahl für die betreffende Glassorte in Rechnung, so erhält man nach Formel 91 $K = 1394$ als Werth der Capacität.

Ist V_1 der Werth der Potentialfunction auf dem durch Mittheilung electrisirten Leiter A und V_2 der Werth der Potentialfunction auf dem durch Vertheilung electrisirten Leiter B eines Condensators von der Capacität K, so ist die zur Erreichung dieses Ladungszustandes erforderliche Electricitätsmenge auf dem Leiter A (innere Belegung der Leydener Flasche [1])

$$Q = K(V_1 - V_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 93^1)$$

Ist der durch Vertheilung electrisirte Leiter B des Condensators (äußere Belegung der Leydener Flasche) zur Erde abgeleitet, was in der Regel der Fall ist, so ist $V_2 = 0$ und somit die Ladungsmenge auf dem Leiter A (innere Belegung)

$$Q = K V_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 94)$$

entsprechend der Formel 87.

Die vorhin beschriebene Leydener Flasche von der Capacität $K = 1394$ (C) würde also, um bei abgeleiteter äußerer Belegung z. B. zum Potential $V_1 = 216$ [$C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}$] geladen zu werden [2]), die Electricitätsmenge $Q = 1394 \times 216 = 301104$ [$C^{\frac{3}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}$] erfordern.

36 **Electrische Energie.** Eine auf einem Leiter angesammelte Electricitätsmenge Q, die einen gewissen Potentialwerth V besitzt, stellt einen bestimmten Arbeitsvorrath, potentielle Energie genannt, dar, insofern nämlich bei der Entladung des Leiters, z. B. durch Verbindung mit der Erde, wobei die abgeleitete Electricitätsmenge den Potentialwerth Null annimmt, eine Arbeit geleistet wird, die sich durch Erwärmung des Verbindungsleiters, vielleicht auch Funkenbildung u. s. w. zu erkennen gibt. Für die electrische Energie U (Arbeitsvermögen) einer Ladung von der Menge Q und vom Potentialwerthe V gilt bekanntlich die Gleichung [3])

$$U = \frac{1}{2} V Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 95)$$

---

[1]) Siehe meinen Grundriß der mechanischen Physik, S. 315.

[2]) Der Potentialwerth 216 nach electrostatischem oder 64 800 Volt nach electromagnetischem Maße würde einer Funkenlänge von ungefähr 2 cm zwischen Kugeln von 22 mm Durchmesser entsprechen. Siehe §. 85.

[3]) Den Nachweis enthält der citirte Grundriß S. 324 und 325.

oder mit Einführung der Capacität $K = \frac{Q}{V}$ (Formel 87)

$$U = \frac{1}{2} K V^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 95\,\text{II})$$

oder endlich durch Einsetzen des Werthes $V = \frac{Q}{K}$ aus 87 in 95.

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{K} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 95\,\text{III})$$

Aus diesen Ausdrücken ergibt sich übereinstimmend die Dimension eines Arbeitswerthes

$$[l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}] \times [l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}] = l\,[l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}]^2 = l^{3/2} m^{1/2} t^{-1} : l,$$

also

$$(U) = \left(\frac{1}{2} V Q\right) = \left(\frac{1}{2} K V^2\right) = \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{K}\right) = l^2 m t^{-2} \quad \ldots \quad 96)$$

übereinstimmend mit Formel 43.

Die nach den vorstehenden Formeln berechneten Werthe der electrischen Energie erhält man natürlich in Erg ausgedrückt, wenn die Werthe für V, Q und K nach Einheiten des C-G-S-Systems bestimmt worden sind.

Die hier mit U bezeichnete electrische Energie wird auch das mechanische Aequivalent der Entladung genannt, sie stellt nämlich eben die Arbeit vor, die bei der Entladung eines mit der Electricitätsmenge Q zum Potential V geladenen Leiters geleistet wird, oder die aufgewendet werden müßte, um einen solchen Ladungszustand auf dem Leiter wieder herzustellen. Dieser Leiter kann auch die eine Belegung eines Condensators (z. B. Franklin'sche Tafel oder Leydener Flasche) sein, dessen andere Belegung zur Erde abgeleitet ist.

Beispielsweise wäre demnach das mechanische Aequivalent der Entladung der im vorigen Paragraphen beschriebenen Leydener Flasche von der Capacität 1394 nach der angenommenen Ladung zum Potential 216 gleich $\frac{1394 \times 216^2}{2}$ $= 32519232$ Erg $\doteq 3{,}25$ Joule $\doteq 0{,}33$ mkg, also rund $^1/_3$ mkg.

Bei der Entladung, auf die sich die Formeln 95 I bis 95 III beziehen, fällt das Potential V des geladenen Leiters auf Null ab, während die Ladung Q, wie wir angenommen haben, in die Erde abfließt. Wird aber das Potential V auf dem Leiter irgendwie constant erhalten, wie z. B. das Potential $V = 0{,}003627$ auf dem Kupferpol eines Daniell'schen Elementes[1]), dessen Zinkpol zur Erde abgeleitet ist, so wird beim Abfließen einer Electricitätsmenge Q von diesem

[1]) Siehe 278 in §. 84.

Leiter in die Erde nicht die Arbeit $\frac{1}{2} VQ$, sondern die Arbeit

$$U = VQ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 97\,\text{I})$$

verrichtet[1]). Der allgemeinere Fall ist der, wenn die Electricitätsmenge Q von einem Leiter, auf dem die Potentialfunction den Werth V_1 hat, auf einen Leiter vom Potential V_2 übergeht, wobei die Arbeit

$$U = (V_1 - V_2) Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 97\,\text{II})$$

geleistet wird[2]). Die Arbeitswerthe gelten auch hier in Erg, wenn die electrischen Größen in electrostatischen C-G-S-Einheiten gegeben sind.

37 **Entladungsstrom.** Verbindet man zwei Leiter, auf denen die Potentialfunction der electrischen Ladung ungleiche Werthe V_1 und V_2 hat[3]), durch einen dritten Leiter, so tritt eine Electricitätsbewegung ein, die man im Allgemeinen einen *electrischen Strom* nennt. Bei der im vorigen Paragraphen betrachteten Entladung eines mit der Erde verbundenen Leiters oder einer Leydener Flasche, deren äußere Belegung zur Erde abgeleitet ist, muß das Ladungspotential V_1 und somit auch der Entladungsstrom rasch auf Null abfallen[4]). Zur Erzeugung eines constanten Stromes ist eine Stromquelle erforderlich, an deren Electroden (z. B. „Polklemmen") eine constante Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ unterhalten wird, wie es z. B. mit Hilfe von hydroelectrischen[5]) und thermoelectrischen Ketten und annähernd[6]) auch mit Hilfe von

---

[1]) Dieselbe Arbeit würde beim Zurücktransportiren der Electricitätsmenge Q auf den Leiter vom Potential V geleistet werden. Hierauf beruht die am Schlusse des §. 92 gegebene Definition des Potentiales. — In unserem Beispiele wäre die beim Ableiten einer electrostatischen Quantitätseinheit ($Q = 1$) in die Erde geleistete Arbeit $0{,}003627 \times 1 = 0{,}003627$ Erg; $= 0{,}003627 \times 10^{-7}$ Joule, d. i. 3.10^9mal kleiner, als die bei der Stromstärke von 1 Ampère in einer Secunde geleistete Stromarbeit des Elementes (1,088 Volt-Coulomb oder Joule).

[2]) Diese Arbeit wird z. B. auch bei einem stationären Strome binnen der Zeit t in einem Leiterstücke geleistet, das von zwei Querschnitten, in denen die Potentialwerthe V_1 und V_2 bestehen, begrenzt ist, wenn $Q = Jt$, wobei J die Stromstärke bedeutet. Siehe §§. 39 und 50.

[3]) Wenn der Leiter, auf den sich der Stellenzeiger 2 bezieht, die Erde ist, ist $V_2 = 0$. Damit soll nicht gesagt sein, daß wir uns die Erde als unelectrisch denken, sondern nur, daß wir alle Potentialniveauhöhen vom Potentialniveau der Erde aus messen, sowie die auf unseren gewöhnlichen Thermometern angegebenen Temperaturen von der Temperatur des schmelzenden Eises, obgleich dessen Temperatur noch 273 Grade über dem absoluten Nullpunkte liegt. (Grundriß der mechanischen Physik, Seite 170.)

[4]) Dabei wollen wir vom Stromrichtungswechsel bei oscillirenden Entladungen absehen. Siehe Pfaundler's Lehrbuch der Physik, 3. Band, Seite 292.

[5]) Zu diesen gehören auch die Accumulatoren.

[6]) Abgesehen von den durch die Construction des Collectors verursachten Stromvibrationen und von Stromschwankungen, die von Unregelmäßigkeiten im Gange des

magnetoelectrischen Inductionsmaschinen (z. B. Dynamomaschinen) erreicht werden kann.

Leitungswiderstand. Ohm'sches Gesetz. Wenn eine Aenderung 38
in dem die Electroden einer Stromquelle verbindenden Leiter (äußerer Stromkreis oder Schließungsbogen genannt) bei ungeänderter Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ an den Electroden („Polspannung") eine Abnahme der Stromstärke J bewirkt, so schließen wir daraus auf eine Zunahme der die Electricitätsbewegung hemmenden Beschaffenheit des Leiters, die man Leitungswiderstand nennt und als deren Maß man das Verhältniß $\frac{V_1 - V_2}{J} = R$ ansieht. Diese Gleichung, gewöhnlich in der Form

$$J = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{H}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 98)$$

geschrieben, ist das für constante Ströme[1]) geltende Ohm'sche Gesetz. Setzt man für $V_1 - V_2$ und J die im electrostatischen Maßsysteme geltenden Dimensionsausdrücke (Formeln 84 und 82) ein, so erhält man für die Dimension eines Widerstandes im electrostatischen Maßsysteme

$$(R) = \frac{l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}}{l^{1/2} m^{1/2} t^{-2}} = l^{-1} t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 99)$$

und für die

$$\text{Widerstands-Einheit} = 1\ [C^{-1}S] \quad . \quad . \quad . \quad 100)$$

Um die Größe dieser Widerstandseinheit zu veranschaulichen, sei bemerkt, daß die in der Electrotechnik gebräuchliche Widerstandseinheit, die wir später (§. 44) unter dem Namen Ohm kennen lernen werden, dem Widerstande eines Quecksilberfadens von 1 mm² Querschnitt und 1,063 m Länge gleichkommt, und daß hingegen ein Quecksilberfaden gleichen Querschnittes, wenn er den Widerstand der in Formel 100 definirten mechanischen Einheit haben sollte, über 2200 mal so lang sein müßte, wie die Entfernung des Mondes von der Erde, wie aus den am Schlusse des I. Theiles vorkommenden Bemerkungen (§. 52) ersichtlich werden wird.

Motors oder der Transmission (z. B. Riemengleiten) herrühren können. Näheres über erstere enthält J. Stefan's Abhandlung: „Beobachtungen über die Vibrationen des Stromes einer Dynamomaschine" in dem Berichte über die internationale electrische Ausstellung in Wien 1883.

[1]) Bei veränderlichen Strömen, wie z. B. bei Wechselströmen, ist das Ohm'sche Gesetz, wie im II. Theile §§. 103 und 111 näher erörtert werden wird, nicht ohne Weiteres anwendbar.

Eine Nachweisung des Ohm'schen Gesetzes mit Hilfe der Potentialtheorie enthält mein Grundriß der mechanischen Physik, S. 332 bis 334.

39 **Stromleistung.** Denken wir uns ein von zwei Querschnitten begrenztes Stück eines Stromkreises in Betracht gezogen und nehmen wir an, daß jene Querschnitte, durch die der Strom in das betrachtete Leiterstück eintritt und aus demselben austritt, zwei Niveauflächen angehören, denen die Potentialwerthe V_1 und V_2, deren Unterschied $V_1 - V_2$ wir mit H bezeichnen wollen, entsprechen. Ist R der Widerstand des betrachteten Leiterstückes und J die Stärke des als constant angenommenen Stromes, so ist nach dem Ohm'schen Gesetze (Formel 98)

$$H = JR \quad \ldots\ldots\ldots \quad 101)$$

der sogenannte Spannungsverlust, den die in der Zeiteinheit (Secunde) durch jeden Querschnitt des Stromleiters gehende Electricitätsmenge J erleidet[1]), indem sie von einem höheren Potentialniveau V_1 auf ein niedrigeres V_2 herabkommt.

Bei diesem Vorgange findet eine die Erwärmung des Leiters bewirkende Arbeitsleistung statt, die in jeder Secunde den durch das Product $JH = J^2R$ ausgedrückten Betrag ausmacht, der also die Arbeitsstärke

$$P = JH \quad \ldots\ldots\ldots \quad 102)$$

entspricht, oder auch, vermöge Formel 101

$$P = J^2R \quad \ldots\ldots\ldots \quad 103\,\mathrm{I})\ ^2)$$

oder endlich auch, indem man in eine dieser beiden Formeln den Ausdruck 98 für J einsetzt,

$$P = \frac{H^2}{R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 104)$$

---

[1]) Man darf sich nicht vorstellen, daß binnen einer Secunde eine und dieselbe Electricitätsmenge J, den Leiter vom Widerstande R durchströmend, diesen Spannungsverlust erleidet, aber man kann sich vorstellen, daß binnen einer Secunde eine Electricitätsmenge J durch den Querschnitt V_1 eintritt und daß während derselben Zeit eine gleich große aber andere Electricitätsmenge J durch den Querschnitt V_2 austritt. Nähere Erläuterungen über diesen und ähnliche Vorgänge enthält mein „Grundriß der mechanischen Physik", S. 156 u. 334. Siehe auch die Erläuterung der Formel 153 im §. 52.

[2]) Vergl. meinen Grundriß der mechanischen Physik, S. 335. Die Gleichung $W = AJ^2R$, wobei A das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit bedeutet, heißt das Joule'sche Gesetz. Die durch den Strom entwickelte Wärme W nennt man wohl auch die Stromwärme.

Die Größe AJ^2R bedeutet, nach dem Gesagten, die in der Zeiteinheit (1 Secunde) entwickelte Stromwärme, einen constanten Strom J vorausgesetzt. Allgemein beträgt die Stromwärme in einem Zeitelemente $dW = AJ^2R\,dt$, wobei der Strom J auch veränderlich sein kann, und man erhält dann die Stromwärme, die innerhalb der Zeit t entwickelt worden ist, durch Integration

$$W = AR\int_0^t J^2\,dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad 103\,\mathrm{II})$$

wenn der Widerstand R constant ist. Siehe §. 123.

Man erhält diese Arbeitsstärken in Secundenerg (Formel 56), wenn man die Größen J, H und R in den durch die Formeln 83, 86 und 100 definirten electrostatischen C-G-S-Einheiten ausdrückt.

Dividirt man die in Secundenerg ausgedrückten electrischen Leistungen durch 10^7, so erhält man deren Werthe in Secunden-Joule oder -Watt (Formeln 56 und 58).

Als Verwandlungszahl findet man für jeden dieser drei Ausdrücke für P mit Zuziehung der Dimensionsformeln für J, H und R (Formeln 82, 84 und 99) übereinstimmend

$$[l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}] \times [l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}] = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}]^2 \times [l^{-1} t]$$
$$= [l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}]^2 : [l^{-1} t] = [l^2 m t^{-3}],$$

nämlich

$$(P) = (JH) = (J^2 R) = \left(\frac{H^2}{R}\right) = l^2 m t^{-3} \quad . \quad . \quad 105)$$

welcher Ausdruck nicht eine Arbeit an sich (Formel 43), sondern eine auf die Zeiteinheit entfallende Arbeit (Arbeitsstärke oder Leistung, Formel 57) bedeutet.

Um Irrungen vorzubeugen, machen wir schon hier darauf aufmerksam, daß die hier für eine Potentialhöhendifferenz gewählte Bezeichnung H später meist durch e ersetzt sein wird, während H zur Bezeichnung magnetischer Feldstärken dient. So schreiben wir z. B. in der Beweisführung für die Formel 186 (II. Theil, Schluß des §. 71) ie für die Arbeitsstärke des betrachteten Stromes und H für die Feldstärke in der Magnetisirungsspirale.

IV.

Electromagnetische Maße.

Strommaß. Untersuchen wir die Wirkung eines kreisförmigen Strom- 40
leiters (z. B. des Ringes einer Tangentenbussole) auf einen mit der magnetischen Quantität μ begabten Punkt, den wir uns in einer Geraden denken, die im Mittelpunkte des Stromkreises auf dessen Ebene senkrecht steht und die Axe des Stromkreises heißen mag, so finden wir bekanntlich Folgendes. Ist R der Radius des kreisförmigen Stromleiters, i die Intensität des in demselben circulirenden Stromes und x der als verhältnißmäßig sehr groß angenommene Abstand des magnetischen Punktes von der Ebene des Stromkreises, so wird dieser Punkt in der Richtung der Axe mit einer Kraft p angetrieben, die dem Ausdrucke $\frac{2\pi R^2 i}{x^3} \cdot \mu$ proportional ist. Denkt man sich an Stelle des kreis-

förmigen Stromleiters einen kurzen Magnetstab gesetzt, dessen Axe mit jener des kreisförmigen Stromleiters zusammenfällt und von der Ebene desselben halbirt wird, so wirkt dieser Magnet auf die magnetische Quantität μ im Abstande x mit einer Kraft $= \frac{2M}{x^3} \cdot \mu$, wenn wir die im vorhergehenden Abschnitte definirten Maße für Moment M und Quantität μ einführen[1]).

Die Vergleichung beider Ausdrücke führt zur Erkenntniß, daß das Moment eines einem Stromkreise äquivalenten Magneten dem Producte der Kreisfläche mit der Stromstärke proportional ist. Es liegt nahe, die Stromeinheit so zu wählen, daß die Wirkung des Stromkreises auf den betrachteten magnetischen Punkt nicht nur proportional, sondern gleich ist dem Ausdrucke $\frac{2\pi R^2 i}{x^3} \cdot \mu$; dann wird für das Moment des äquivalenten Magneten die Gleichung gelten

$$M = \pi R^2 \,.\, i = fi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad 106)$$

wenn wir mit f die Kreisfläche bezeichnen. Damit haben wir jenen Strom als Stromeinheit festgesetzt, der, eine Kreisfläche $= 1$ umkreisend, dieselbe magnetische Fernwirkung ausübt, wie ein Magnet vom Momente $= 1$, oder, eine Kreisfläche $= f$ umkreisend, dieselbe magnetische Fernwirkung, wie ein Magnet vom Momente f. Diese von Wilhelm Weber definirte Einheit heißt die absolute electromagnetische Stromeinheit[2]). Von W. Weber auf das Mm-Mg-S-System bezogen (Formel 109), wurde sie später dem C-G-S-System angepaßt (Formel 108) und in die Technik eingeführt (Formel 110).

Die Dimension eines nach dem Principe der magnetischen Fernwirkung eines Stromleiters bestimmten Stromwerthes ergibt sich aus der Erwägung $i = \frac{M}{f}$ und wird daher gefunden, indem man die Dimension eines magnetischen Momentes (Formel 70) durch jene einer Fläche dividirt. Man erhält sonach

$$(i) = l^{1/2} m^{1/2} t^{-1} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad 107)$$

für einen Stromwerth nach electromagnetischem Maße; und folglich für die electromagnetische Stromeinheit im C-G-S-System

$$\text{Stromeinheit} = 1\ [C^{1/2} G^{1/2} S^{-1}] \;.\;.\;. \quad 108)$$

---

[1]) Hat der afficirte Punkt nördlichen Magnetismus und erscheint von ihm aus gesehen der Stromlauf im Kreise der Richtung eines Uhrzeigers entgegengesetzt, so wird der magnetische Punkt vom Stromkreise abgestoßen.

[2]) Die absolute electromagnetische Stromeinheit kann auch definirt werden als der Strom, der, ein kreisbogenförmiges Leiterstück vom Radius $= 1$ und von der Länge $= 1$ durchfließend, auf eine im Krümmungsmittelpunkte befindliche magnetische Quantitätseinheit mit der Kraft $= 1$ wirkt.

Diese Stromeinheit stellt einen Strom vor von solcher Stärke, daß er, eine Fläche von einem Quadratcentimeter umkreisend, dieselbe magnetische Fernwirkung äußert, wie ein Magnet von einem Centimeter Poldistanz, der in jedem seiner Pole eine magnetische Quantitätseinheit concentrirt hat.

Hingegen ist die ursprüngliche

$$\text{Weber'sche Stromeinheit} = 1\,[\mathrm{Mm^{1/2}\,Mg^{1/2}\,S^{-1}}]. \quad . \quad . \quad 109)$$

nach Formel 16 hundertmal kleiner.

Als practische Einheit hat man $^1/_{10}$ der absoluten electromagnetischen Stromeinheit unter dem Namen Ampère eingeführt, nämlich

$$1\ \text{Ampère} = 10^{-1}\,[\mathrm{C^{1/2}\,G^{1/2}\,S^{-1}}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 110)^1)$$

eine Stromstärke, die mit einer für alle practischen Zwecke hinreichenden Genauigkeit auch als jene definirt werden kann, die in einer Secunde 0,001 118 Gramm Silber electrolytisch ausscheidet.

Der Strom von 1 Ampère zersetzt oder scheidet aus in Grammen:

	Secunde	Minute	Stunde
Wasser	0,0000933	0,005598	0,33588
Kupfer	0,0003294	0,019766	1,1859
Zink	0,0003388	0,020325	1,2195
Silber	0,0011181	0,067085	4,02516
Aequivalente	0,00001036	0,0006215	0,03729
Knallgas bei der Electrolyse	$\frac{0,1740}{1865}$	$\frac{10,44}{1865}$	$\frac{626,4}{1865}$

Da einem Gramm Wasser 1865 Cubikcentimeter Knallgas bei 0° C. und 760 mm Druck entsprechen, so bedeuten die Zähler der vorstehenden Brüche die Cubikcentimeter Knallgas, die Brüche selbst aber die Knallgasmengen in Grammen.

Aus den vorstehenden Zahlen folgt auch, daß zur Zerlegung oder Ausscheidung eines Aequivalentes $\frac{1}{0,03729} \doteq 27$ Ampère-Secunden[2]) erforderlich sind.

---

[1]) Auch diese Bestimmung ist im Einklange mit der im §. 11 angegebenen Regel für die Bildung der „practischen Einheiten".

[2]) Z. B. der Strom von 27 Ampère während einer Stunde, oder der Strom von 1 Ampère während 27 Stunden, oder von J Ampère während t Stunden, wenn $Jt = 27$ ist. Siehe §. 41. Die Zahl 0,03729 für eine Stunde oder 3600 Secunden ergibt sich aus $\frac{0,0011181}{107,93} \times 3600 = 0,00001036 \times 3600$, wobei 107,93 das Aequivalentgewicht des Silbers ist. Weiteres im II. Theile, §. 92.

Die stärksten in der Industrie (z. B. bei electrolytischen oder Schmelzprocessen für Aluminium-Gewinnung oder Calciumcarbid-Erzeugung) zur Anwendung kommenden Ströme werden nach Tausenden von Ampère gemessen.

Sehr geringe Stromstärken werden häufig in Milliampère (tausendstel Ampère) ausgedrückt.

Zum Schlusse geben wir zur Erläuterung der auf das magnetische Moment eines Kreisstromes bezüglichen Formel 106 noch ein Zahlenbeispiel.

Es soll die Stromstärke J in Ampère und zunächst die Stromstärke i in absolutem electromagnetischem Maße berechnet werden, die in einem kreisförmigen Leiter von 15 cm Radius circuliren muß, um diesem das magnetische Moment 1166, gleich jenem des am Schlusse des §. 30 erwähnten Magnetstabes zu ertheilen. Die Bedingungsgleichung nach Formel 106 ist $\pi R^2 i = M$, also in unserem Falle $\pi \times 15^2 \times i = 1166$, somit $i = 1{,}65$ absolute electromagnetische Einheiten oder $J = 16{,}5$ Ampère. Die Kreisfläche πR^2 gibt das magnetische Moment an, das der Strom $i = 1$ dem kreisförmigen Stromleiter ertheilt. In unserem Falle ist $\pi R^2 = 707$ cm², der Strom $i = 1$ würde also dem kreisförmigen Stromleiter das Moment 707 ertheilen. Um das Moment 1166 hervorzubringen, ist also eine $\frac{1166}{707} = 1{,}65$ mal größere Stromstärke erforderlich.

41 **Electricitätsmenge.** Im electrostatischen Maßsysteme haben wir zuerst die electrische Quantitätseinheit festgestellt und daraus die Stromeinheit als den Strom abgeleitet, der in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Leiters geht; im electromagnetischen Maßsysteme haben wir vorerst die Stromeinheit definirt und leiten daraus die Einheit der Electricitätsmengen ab, indem wir jene Electricitätsmenge = 1 annehmen, die bei einem Strome von der Stärke = 1 in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Leiters geht.

Die Dimension einer auf die so definirte Quantitätseinheit bezogenen Electricitätsmenge Q ergibt sich aus der Beziehung $Q = it$, wobei i die Stromstärke bedeutet, die erforderlich ist, um binnen t Zeiteinheiten die Electricitätsmenge Q durch einen Querschnitt des Leiters zu führen. Mit Rücksicht auf die Dimension $l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}$ eines electromagnetischen Stromwerthes (Formel 107) erhält man demnach

$$(Q) = (it) = l^{1/2} m^{1/2} t^{-1} \times t = l^{1/2} m^{1/2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 111)$$

und als Ausdruck für die absolute electromagnetische Einheit der Electricitätsmengen

$$\text{Electrische Quantitätseinheit} = 1\ [C^{1/2} G^{1/2}] \quad . \quad . \quad . \quad 112)$$

Der zehnte Theil dieser Einheit bedeutet die Electricitätsmenge, die beim

Strome von 1 Ampère in 1 Secunde durch einen Leiterquerschnitt geht und heißt

$$1\ \text{Coulomb} = 10^{-1}\ [C^{1/2}G^{1/2}] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 113)$$

Die electromagnetische Electricitätseinheit ist im Vergleiche mit der electrostatischen (§. 31) sehr groß und beträgt das 3.10^{10}fache derselben, so, daß 1 Coulomb dreitausend Millionen (3.10^9) electrostatische Einheiten ausmacht. Die Electricitätsmenge von einem Coulomb würde hinreichen, um zehntausend Leydener Flaschen, wie die im §. 35 beschriebene, bis zu einem Potential von rund 200 electrostatischen Spannungseinheiten (60000 Volt; siehe §. 43) zu laden.

Da ein Coulomb mit einer „Ampère-Secunde" gleichbedeutend ist, so geben die in der Tabelle des §. 40 unter der Rubrik „Secunde" angeführten Zahlen die Stoffmengen in Grammen an, die durch ein Coulomb electrolytisch zersetzt oder ausgeschieden werden, also z. B. 0,0000933 GrammWasser, oder 0,0003294 Gramm Kupfer, oder 0,0011181 Gramm Silber u. s. w. oder allgemein 0,00001036 Aequivalente.

Durch Multiplication dieser Zahlen mit 10 erhält man die Stoffmengen in Grammen, die durch die absolute electromagnetische Electricitätseinheit (10 Coulomb) electrolytisch zersetzt oder ausgeschieden werden und die man deshalb auch electrochemische Aequivalente nennt. Es ist also z. B. 0,000933 Gramm das electrochemische Aequivalent des Wassers, 0,011181 Gramm das des Silbers u. s. w.

Dividirt man das electrochemische Aequivalent η einer Substanz durch ihr chemisches Aequivalent α, so erhält man nahezu übereinstimmend

$$\frac{\eta}{\alpha} = 0{,}0001036\ ^{1})$$

als die Zahl der Aequivalente, die durch die absolute electromagnetische Electricitätseinheit electrolytisch zersetzt oder ausgeschieden werden. Ein Zehntel davon, nämlich 0,00001036, gilt für ein Coulomb (Ampère-Secunde), wie mit Hinweisung auf die Tabelle des §. 40 bereits bemerkt worden ist.

Da sonach ein Coulomb in runder Zahl ein Hunderttausendstel eines Aequivalentes electrolytisch zerlegt oder ausscheidet, so sind für ein ganzes

---

[1]) Für Silber erhält man z. B. $\frac{0{,}011181}{107{,}93} = 0{,}00010359$, für Kupfer dieselbe Zahl aus $\frac{0{,}003294}{31{,}8}$, wobei zu bemerken ist, daß man bei den zweiwerthigen und vierwerthigen Elementen die Hälfte von den gegenwärtig angenommenen Atomgewichten als Aequivalentgewichte in Rechnung zu bringen hat, also z. B. $\frac{63{,}6}{2} = 31{,}8$ für Kupfer, $\frac{194{,}8}{2} = 97{,}4$ für Platin u. s. w. Ich will diese Zahlen die „electrolytischen Aequivalente" nennen. (Siehe auch II. Theil, §. 92.)

Aequivalent rund hunderttausend Coulomb erforderlich. Die genauere Zahl ist 96530 [1]), d. h. so viele Coulomb sind erforderlich, um z. B. 9 Gramm Wasser zu zersetzen, oder 107,93 Gramm Silber, oder 31,8 Gramm Kupfer, oder 97,4 Gramm Platin u. s. w. auszuscheiden. Zur electrolytischen Zerlegung von 1 Milligramm Wasser sind rund 10,7 Coulomb erforderlich. (Vergl. §. 31.)

42 **Ampère-Stunde, -Minute, -Secunde.** Mit diesen Ausdrücken bezeichnen wir die Electricitätsmengen, die bei der Stromstärke von 1 Ampère binnen einer Stunde, Minute oder Secunde durch einen Querschnitt des Leiters gehen, also die Electricitätsmengen von 3600, 60 oder 1 Coulomb.

Hat man es mit einem veränderlichen Strome $J = f(t)$ zu thun, wobei wir uns das Ampère als Stromeinheit und die Stunde als Zeiteinheit eingeführt denken wollen, so beträgt die im Zeitraume $t_2 - t_1$ durch einen Querschnitt des Leiters gegangene Electricitätsmenge

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} J\,dt. \quad \ldots \quad 114)$$

Ampère-Stunden [2]). — Hat man die Minute oder Secunde als Zeiteinheit angenommen, so bedeutet das Integral Ampère-Minuten oder Ampère-Secunden. Im Allgemeinen kann man sagen, daß das Zeitintegral einer Stromstärke eine Electricitätsmenge bedeutet, sowie das Zeitintegral einer Arbeitsstärke eine Arbeit vorstellt [3]).

43 **Electromotorische Kraft.** Wir denken uns in einem homogenen magnetischen Felde (§. 28) von der Stärke F einen geraden Leiter von der Länge l in einer zu den Kraftlinien des Feldes senkrechten Ebene und in einer zur Länge l senkrechten Richtung [4]) mit der constanten Geschwindigkeit v bewegt. Bei diesem Vorgange wird im Leiter eine mit dem Producte Flv proportionale electromotorische Kraft inducirt. Wählt man als Einheit der inducirten electromotorischen Kräfte jene, die in einem Leiter von der Länge $l = 1$ inducirt wird, wenn er sich in einem magnetischen Felde von der Stärke $F = 1$ mit der Geschwindigkeit $v = 1$ senkrecht zu den Kraftlinien bewegt, so wird man im Allgemeinen die bei der beschriebenen Bewegung inducirte electromotorische Kraft

---

[1]) $\frac{1}{0{,}000010359} = 96530 = \frac{10\,\alpha}{\eta}$.

[2]) Siehe auch II. Theil, §. 93, Formel 324.

[3]) Siehe im §. 24 die Bemerkungen nach Formel 66.

[4]) Man sagt in diesem Falle: der Leiter bewege sich „senkrecht zu den Kraftlinien", oder der Leiter „durchschneide die Kraftlinien senkrecht".

$$V_1 - V_2 = H = Flv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 115)^1)$$

setzen können, da unter den gemachten Voraussetzungen die Proportionalitätsconstante = 1 ist. Dabei haben wir H als die Differenz der Potentialwerthe V_1 und V_2 an den Enden des Leiterstückes von der Länge l anzusehen.

Demnach ergibt sich die Dimension eines Potentialwerthes im electromagnetischen Maßsystem gleich dem Producte der Dimensionen von magnetischer Feldstärke $l^{-1/2}m^{1/2}t^{-1}$ (Formel 77), Länge l und Geschwindigkeit lt^{-1} (Formel 23), also

$$(V) = (H) = l^{3/2}m^{1/2}t^{-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 116)$$

entsprechend der Dimension des Productes Flv in Formel 115. Hieraus folgt im electromagnetischen Maße für das C-G-S-System die Definition

$$\text{Einheit der electromotorischen Kräfte} = 1\ (C^{3/2}G^{1/2}S^{-2}) \quad . \quad 117)$$

Diese Größe bedeutet die an den Enden eines 1 cm langen Leiterstückes bei der beschriebenen Bewegung in einem magnetischen Felde von der Stärke 1 ($C^{-1/2}G^{1/2}S^{-1}$) und mit der Geschwindigkeit 1 (CS^{-1}), d. i. 1 cm in der Secunde, auftretende Potentialdifferenz. Diese ist, wie man z. B. im Hinblick auf die Verhältnisse an unseren Dynamomaschinen leicht abschätzen kann[2]), sehr gering und beträgt in der That weniger als den hundertmillionten Theil der electromotorischen Kraft eines Daniell'schen Elementes. Man hat denn auch das Hundertmillionenfache der in Formel 117 definirten Spannungseinheit als practische Einheit für electromotorische Kräfte (oder Potentialwerthe) eingeführt, was auch mit der im §. 11 angegebenen allgemeinen Regel für die internationalen practischen Einheiten übereinstimmt[3]). Man hat diese practische Spannungseinheit Volt genannt und es gilt demnach die Definition

$$1\ \text{Volt} = 10^8\,(C^{3/2}G^{1/2}S^{-2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 118)$$

Das Volt wird für practische Zwecke auch hinreichend genau angegeben als $\frac{1}{1{,}434} = 0{,}69735$ von der electromotorischen Kraft eines regelrecht[4])

---

[1]) Zur Bestimmung der Richtung des inducirten Stromes mag die Fleming'sche Regel dienen: Man halte Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand so, daß sie wie Coordinatenaxen aufeinander senkrecht stehen. Bringt man dann den Zeigefinger in solche Lage, daß er den Verlauf der Kraftlinien anzeigt, und den Daumen in die Richtung der Bewegung des Leiters, so zeigt der Mittelfinger die Richtung des im Leiter inducirten Stromes an. — [Die analoge Anwendung der linken Hand dient zur Anzeige der Richtung (Daumen), in der ein stromführender Leiter in einem Magnetfelde zur Bewegung angetrieben wird.]

[2]) Bei den Dynamomaschinen beträgt die Feldstärke F Tausende von Einheiten, die Länge l des inducirten Drahtes und die Geschwindigkeit v seiner Bewegung viele Meter. Siehe die Angaben in Kittler's Handbuch der Electrotechnik, z. B. S. 499.

[3]) Der Coefficient m in der Formel 20 wird nämlich in diesem Falle $= 10^{9 \cdot 3/2 - 11 \cdot 1/2} = 10^8$.

[4]) Das Clark-Element besteht aus reinem Quecksilber, bedeckt mit einem durch Kochen von Quecksilbersulfat in concentrirter Zinksulfatlösung erhaltenen Teige in

hergestellten Clark-Elementes bei 15° C. Die electromotorische Kraft eines Daniell'schen Elementes wollen wir etwa = 1,088 Volt[1]) annehmen.

Für andere häufig angewendete Elemente können ungefähr nachstehende Werthe der electromotorischen Kräfte in Volt angenommen werden: 1 Bunsen = 1,9; 1 Leclanché = 1,5; 1 Noë'sches Thermo-Element bei stärkster zulässiger Erhitzung = 0,12; 1 Marcus'sches Thermo-Element bei größter zulässiger Erhitzung = 0,06; ein Wismuth-Antimon-Element bei 100° C. Temperaturdifferenz = 0,01[2]).

Im Vergleiche mit der electrostatischen Spannungseinheit (Formel 86) ist auch das Volt noch immer klein, denn es beträgt, wie wir später sehen werden, 1 Volt nur $\frac{1}{300}$ der electrostatischen Spannungseinheit; es kommen also 300 Volt = 278 Daniell auf eine solche. Die Potentialdifferenzen, die erforderlich sind, um zwischen abgerundeten Spitzen bei gegenseitiger Annäherung bis unter 1 mm eine Funkenbildung zu erzeugen, werden nach Tausenden von Volt gerechnet[3]).

Beispiel. Wollte man nach Formel 115 die Geschwindigkeit v berechnen, mit der ein Leiter von der Länge eines Meters, also $l = 100$ cm, im Felde der erdmagnetischen Horizontalintensität $F = 0{,}2$ in der oben beschriebenen Weise bewegt werden müßte, um in demselben die electromotorische Kraft von einem Volt, also $H = 10^8$ (Formel 118) zu induciren, so fände man aus der Gleichung $10^8 = 0{,}2 \times 100 \times v$ das $v = 5 \cdot 10^6$ cm = 50000 m, also eine Geschwindigkeit, die ungefähr das 100fache von der Geschwindigkeit eines Geschosses beträgt. In einem magnetischen Felde von der Intensität $F = 5000$, wie es sich durch starke Electromagnete wohl erzeugen läßt[4]), würde zur Er-

---

den chemisch reines amalgamirtes Zink als negativer Pol eintaucht. Der Contact mit dem Quecksilber kann durch einen Platindraht hergestellt werden (Pfaundler, III, 434; Kittler, I, 298). Hierzu bemerken wir jedoch, daß die Physicalisch-Technische Reichsanstalt (mit 1. Januar 1901) den Werth der electromotorischen Kraft des Clark-Elementes bei 15° C. gleich 1,4328 Volt angenommen hat. — Eine Tabelle der Werthe dieser Größe bei verschiedenen Temperaturen findet man in F. Kohlrausch, Lehrbuch der practischen Physik (1901), S. 351.

[1]) Siehe meine Abhandlung in Poggendorff's Annalen 1868 und A. v. Ettingshausen in der Zeitschrift für Electrotechnik (1884).

[2]) Die angeführten Werthe in runden Zahlen habe ich aus eigenen Messungen entnommen und sie stimmen auch mit den Angaben und Resultaten anderer Autoren sehr nahe überein. Für Leclanché geben Clark und Sabine den Werth 1,48 an. Für Wismuth-Antimon fand ich durchschnittlich nur 0,008, berechnete jedoch aus den Messungen von Matthiessen, Wheatstone und Pouillet etwas größere Werthe.

[3]) Man vergleiche das oben im §. 33 und im II. Theile §. 85 hierüber Gesagte.

[4]) Siehe den II. Theil, Schluß des §. 82.

regung derselben electromotorischen Kraft unter übrigens gleichen Umständen eine 25 000 mal kleinere Geschwindigkeit, also $v = 2$ m, ausreichen.

Bei den Dynamomaschinen findet der Vorgang der Induction unter weniger einfachen Verhältnissen statt, doch kommen auch hier drei den Größen F, l und v der Formel 115 entsprechende Größen in Betracht, die als Factoren für die electromotorische Kraft maßgebend sind. Die electromotorische Kraft E in Volt ist nämlich bestimmt durch die Gleichung

$$E = \frac{ZNn}{6.10^9} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 119)$$

Hier bedeutet Z die Gesammtzahl der das Ankereisen durchsetzenden Kraftlinien (abhängig von der Feldstärke des Magneten), N die Zahl der Drähte rings um den Anker abgezählt [1]) (abhängig nach Maßgabe der Abmessungen

---

[1]) Silv. P. Thompson, Dynamo-Electric Machinery, 4. Auflage, S. 174. — Bei Ringankern ist dieses N gleich der einfachen, bei Trommelankern gleich der doppelten Windungszahl. — Der Beweis der Formel 119 läßt sich auf die im §. 108 bewiesene Formel 404 zurückführen, nämlich $e = \bar{z} w \sin wt$ für die in einem mit der Winkelgeschwindigkeit $w = \frac{2\pi}{T}$ (wobei T die Umlaufszeit ist) in einem magnetischen Felde rotirenden Drahtringe inducirte electromotorische Kraft e, wenn $\bar{z}$ die Maximalzahl der den Ring durchsetzenden Kraftlinien bedeutet. Der Maximalwerth dieser electromotorischen Kraft ist (Formel 405) $\bar{e} = \bar{z} w$ und der Mittelwerth (Formel 408) ist

$$M_{(e)} = \bar{\bar{e}} = \frac{2}{\pi} \cdot \bar{z} w = \frac{2}{\pi} \bar{z} \frac{2\pi}{T} = \frac{4\bar{z}}{T} = \frac{4n}{60} \cdot \bar{z}, \text{ da } \frac{1}{T} = \frac{n}{60},$$

wenn n die Tourenzahl pro Minute ist. Die Größe $\bar{\bar{e}} = \frac{4n}{60} \bar{z}$ ist die mittlere electromotorische Kraft eines einzigen rotirenden Drahtringes. Bei der Anwendung auf die m Ankerwindungen einer Dynamomaschine hat man, da diese m Windungen zwischen den Bürsten mittelst des Collectors stets paarweise parallel geschaltet sind, $\bar{\bar{e}}$ mit $\frac{m}{2}$ zu multipliciren, um die mittlere electromotorische Kraft $\bar{\bar{e}}_m$ für alle m Windungen des Ankers zu erhalten. Also

$$\bar{\bar{e}}_m = \frac{m}{2} \cdot \frac{4n}{60} \cdot \bar{z} = \frac{2mn}{60} \cdot \bar{z}.$$

Bezeichnet man nun einerseits die Zahl der Drähte, auf der Mantelfläche des Ankers abgezählt, mit N und anderseits die Gesammtzahl der das Ankereisen durchsetzenden Kraftlinien mit Z, so ist beim Trommelanker $m = \frac{N}{2}$ und $\bar{z} = Z$, also $m\bar{z} = \frac{NZ}{2}$, somit $\bar{\bar{e}}_m = \frac{NZn}{60}$ und beim Ringanker $m = N$ und $\bar{z} = \frac{Z}{2}$, also $m\bar{z} = \frac{NZ}{2}$, folglich ebenfalls $\bar{\bar{e}}_m = \frac{NZn}{60}$. Dies gilt für absolute Einheiten. Man erhält also die in Volt ausgedrückte mittlere electromotorische Kraft $E = \frac{\bar{\bar{e}}_m}{10^8} = \frac{NZn}{6.10^9}$.

des Wickelungsraumes von der aufgewickelten Drahtlänge) und n die Tourenzahl pro Minute (proportional der Geschwindigkeit der Ankerdrähte). Will man zur Verminderung des Wickelungsraumes die Drahtlänge beschränken, so kann die dadurch bewirkte Verminderung der electromotorischen Kraft nach Umständen durch Vermehrung der Feldstärke und der Tourenzahl ausgeglichen werden.

Von der sogenannten Selbstinduction sowie von der gegenseitigen Induction von Stromleitern wird im II. Theile (§§. 103 bis 106) die Rede sein.

44 Leitungswiderstand. Wenn man die im §. 38 bereits erörterten Beziehungen auch im electromagnetischen Maßsysteme ins Auge faßt, so erhält man für einen Leitungswiderstand $R = \frac{V_1 - V_2}{J}$ zunächst den Dimensionsausdruck

$$(R) = \frac{l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}}{l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}} = l t^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 120)$$

Wir bemerken, daß hier der Widerstand mit demselben Dimensionsausdrucke erscheint, wie die Geschwindigkeit, und wollen den Zusammenhang sofort aufklären. Wenn wir den im §. 43 beschriebenen Inductionsvorgang uns vergegenwärtigen, wird sofort einleuchtend, daß zur Induction gleich starker Ströme in verschiedenen Leitern unter übrigens gleichen Umständen desto größere Geschwindigkeiten erforderlich sein werden, je größer der Widerstand des betreffenden Leiters ist. — Es ergibt sich ferner für das C-G-S-System die

$$\text{Widerstandseinheit} = 1\ [CS^{-1}] \quad \ldots\ldots \quad 121)$$

Diese Einheit bedeutet einen Widerstand, der so klein ist, daß bei der im §. 43 beschriebenen Induction, wenn diese in einem magnetischen Felde von der Intensität = 1 mit der Geschwindigkeit = 1 Centimeter pro Secunde stattfindet, die auf der Strecke eines Centimeters hervorgerufene Potentialdifferenz hinreichen würde, bei diesem Widerstande eine Stromstärke gleich der in Formel 108 definirten absoluten Stromeinheit hervorzubringen.

Dieser Widerstand ist also nach unseren gewöhnlichen erfahrungsmäßigen Vorstellungen außerordentlich klein. Man hat deshalb den tausendmillionenfachen Betrag desselben als practische Widerstandseinheit und zwar unter dem Namen Ohm eingeführt, nämlich:

$$1\ \text{Ohm} = 10^9\ [CS^{-1}] \quad \ldots\ldots\ldots \quad 122)^1)$$

Dieser Widerstand kommt der bis jetzt vorherrschend gebrauchten Siemens'schen Widerstandseinheit (Widerstand eines Quecksilberprismas von 1 mm²

[1]) Der Coefficient m der Formel 20 wird hier $= 10^{9 \times 1 - 11 \times 0} = 10^9$.

Querschnitt und 1 m Länge bei 0° C.) ziemlich nahe und wird als internationales Widerstandsmaß gleich dem Widerstande eines Prismas (oder Cylinders) von 1,063 m Länge und 1 mm² Querschnitt chemisch reinen Queckſilbers von der Temperatur 0° C. angenommen, was wir kurz ſo ſchreiben wollen

$$\text{Internationales Ohm} = 1063 \frac{\text{mm}}{\text{mm}^2} Hg \quad . \quad . \quad . \quad 123)^1)$$

oder auf die Siemens-Einheit (S E) bezogen

$$\text{Internationales Ohm} = 1{,}063 \text{ S E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 124)$$

folglich

$$\text{Siemens-Einheit} = 0{,}9407 \text{ Ohm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 125)$$

Zur näheren Kennzeichnung des in den vorſtehenden Definitionen vorausgeſetzten chemiſch reinen Queckſilbers kann man auch ſagen: Das Ohm iſt dargeſtellt durch den Widerſtand, den ein unveränderlicher Strom[2]) in einer Queckſilberſäule erfährt, die 14,4521 Gramm Maſſe, eine conſtante Querſchnittsfläche, die Länge von 106,3 Centimeter[3]) und die Temperatur des ſchmelzenden Eiſes hat[4]).

Zur Bezeichnung des Ohm dient häufig der Buchſtabe Ω.

Specifiſcher Widerſtand. Der Ausdruck ſpecifiſcher Widerſtand wird 45
in zwei verſchiedenen Bedeutungen gebraucht.

A. Man verſteht darunter für ein beſtimmtes Material den Widerſtand ϱ eines daraus geformten Prismas von der Länge = 1 und vom Querſchnitte = 1, alſo, wie wir kurz ſagen wollen, den Widerſtand eines Würfels vom Volumen = 1. Der Widerſtand R eines prismatiſchen oder cylindriſchen

---

[1]) The Board of Trade Electrical Standards Committee (nämlich das mit der Berathung dieſes Gegenſtandes betraute Comité des engliſchen Handelsamtes) hat dieſe Beſtimmung der Widerſtandseinheit am 29. November 1892 der engliſchen Regierung zur geſetzlichen Sanctionirung empfohlen und der Electrotechniker-Congreß in Chicago hat im Auguſt 1893 denſelben Werth für das internationale Ohm feſtgeſetzt. (The Electrician, Electrical Trades Directory for 1893, London; Dr. Joh. Sahulka, Die Electrotechnik auf der Weltausſtellung in Chicago, Wien, 1895.)

[2]) Durch die Bedingung eines unveränderlichen Stromes iſt die ſcheinbare Widerſtandsänderung durch die bei veränderlichen Strömen auftretende Selbſtinduction (ſiehe II. Theil, §§. 103 und 111) ausgeſchloſſen.

[3]) Vor 1892 war das von der im Jahre 1884 berufenen Delegirten-Conferenz feſtgeſtellte „legale Ohm" mit dem Werthe von 1,06 S E im Gebrauche. Genauere Beſtimmungen haben ſpäter einen etwas größeren Werth ergeben. Nach F. Kohlrauſch (Sitzungsberichte der bairiſchen Academie der Wiſſenſchaften, 1888, Heft 1) wäre 1 Ω = 1,0632 S E und alſo 1 S E = 0,9406 Ω.

[4]) Aus den Beſchlüſſen des Electrotechniker-Congreſſes in Chicago. Siehe den citirten Bericht von Dr. Joh. Sahulka.

Leiters aus diesem Materiale, von der Länge L und vom Querschnitte Q ist dann ausgedrückt durch

$$R = \varrho \frac{L}{Q} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 126)$$

Ist also z. B. L in Centimetern und Q in Quadratcentimetern ausgedrückt, dann ist ϱ nach unserer vorstehend erläuterten Ausdrucksweise der Widerstand eines Cubikcentimeters des betreffenden Materiales, also der specifische Widerstand desselben für die Längeneinheit = 1 Centimeter.

Hätte man 1 Millimeter als Längeneinheit angenommen, also den Widerstand eines Cubikmillimeters des untersuchten Materiales als dessen specifischen Widerstand, so hätte man dafür wegen hundertfacher Verkleinerung des Querschnittes bei zehnfacher Verminderung der Länge einen zehnmal größeren Werth erhalten. Der specifische Widerstand als Widerstand des Würfels der Längeneinheit definirt, ist also der Längeneinheit verkehrt proportional. 1 cm^3 *Hg* hat den Widerstand 0,000 094 07 Ω, 1 mm^3 *Hg* hingegen den Widerstand 0,000 940 7. Mit Beibehaltung des Ohm als Widerstandseinheit wäre also l^{-1} als Dimension eines specifischen Widerstandes anzusehen.

Wenn man aber nicht nur bezüglich der Größen L und Q die Längeneinheit ändert, sondern auch bezüglich der Widerstandseinheit von einem Maßsystem auf das andere (z. B. von der absoluten Einheit CS^{-1} auf die absolute Einheit $Mm\,Sec^{-1}$) übergeht, ergibt sich die Dimension von ϱ aus der Erwägung $\varrho \frac{L}{Q} = lt^{-1}$, wie leicht ersichtlich

$$(\varrho) = l^2 t^{-1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 127)$$

woraus sich für das C-G-S-System ergeben würde

$$\text{Einheit des specifischen Widerstandes} = 1\mathfrak{f}(C^2S^{-1}) \quad \ldots \quad 128)$$

Dieser specifische Widerstand würde einem Stoffe zukommen, der so beschaffen wäre, daß ein daraus geformtes Prisma (oder Cylinder) von der Länge eines Centimeters und vom Querschnitte eines Quadratcentimeters den Widerstand CS^{-1} (Formel 121), d. i. 10^{-9} Ohm hätte. Siehe Formel 122.

Mit Beibehaltung des Ohm als Widerstandseinheit sind wohl auch die Ausdrücke Ohmcentimeter, Microhmcentimeter und Megohmcentimeter gebräuchlich, um anzudeuten, daß man den Widerstand eines Prismas von 1 cm Länge und 1 cm^2 Querschnitt von dem untersuchten Materiale in Ohm, Microhm oder Megohm ausgedrückt hat[1]).

Wir werden in der Regel vom Ohmcentimeter Gebrauch machen, d. h. als

[1]) Zum Beispiel Uppenborn, Kalender für Electrotechniker, 1902, S. 61.

Einheit der specifischen Widerstände den eines Stoffes ansehen, von dem ein Prisma oder Cylinder von 1 cm Länge und 1 cm² Querschnitt den Widerstand von einem Ohm hat. Diesen specifischen Widerstand von „einem Ohm pro Cubikcentimeter" bezeichnen wir mit dem Symbol $10^9\,C^2S^{-1}$, oder auch mit ΩC, da wir das Ohm $= 10^9\,CS^{-1}$ mit Ω bezeichnen. Siehe II. Theil, §. 91.

Indem wir uns vorbehalten, im II. Theile, §. 91, eine Zusammenstellung von bemerkenswerthen specifischen Widerständen zu geben, mögen hier nur einige davon beispielsweise angeführt werden.

Der specifische Widerstand des reinen Quecksilbers bei 0° C. in $10^9\,C^2S^{-1}$ ist, wie schon angegeben worden ist $= 0{,}000\,094\,07$; für reinstes Kupfer können wir annehmen $0{,}000\,001\,533$ [1]); für geglühtes reines Silber $0{,}000\,001\,499$; für Messing $0{,}000\,006\,9$; für reines Eisen etwa $0{,}000\,009\,7$ [2]); für Neusilber (von der Zusammensetzung 60 Proc. Cu, 25 Proc. Zn, 15 Proc. Ni) 0,000 03; für Patentnickel (75 Proc. Cu, 25 Proc. Ni) 0,000 034; für Manganin (84 Proc. Cu, 12 Proc. Mn, 3,5 Proc. Ni) 0,000 04; für Constantan (50 Proc. Cu, 50 Proc. Ni) 0,000 05. Diese Zahlen gelten für 0°; den Einfluß der Temperatur werden wir später berücksichtigen.

Ferner haben bei 18° C. die nachstehend mit Angabe des Procentgehaltes angeführten wässerigen Lösungen die beigefügten specifischen Widerstände: HNO_3 (31 Proc.) 1,2789; HCl (20 Proc.) 1,3132; H_2SO_4 (30 Proc.) 1,3535; NaCl (26,4 Proc.) 4,6382; NaCl (10 Proc.) 8,2576.

Für destillirtes Wasser von 20° C. fand ich beispielsweise $0{,}257 \times 10^6$; für Regen- oder Schneewasser von 18° C. kann man (nach F. Kohlrausch [3]) je nach der geringeren oder größeren Reinheit der Niederschläge annehmen $0{,}047 \times 10^6$ bis $0{,}229 \times 10^6$.

---

[1]) Das Kupfer des Handels hatte früher (nach einer Angabe von Zamminer 1858) einen im Vergleiche mit Silber 1,27 mal größeren specifischen Widerstand, also 0,000 001 9, entsprechend einer 49,7 mal größeren Leitfähigkeit im Vergleiche mit Quecksilber, während man jetzt wohl mindestens 57 mal besser als Quecksilber leitendes Kupfer, also solches vom specifischen Widerstande 0,000 001 65 für electrische Leitungen beansprucht und bei der Gewinnung der Electrolyt- und bestraffinirten Kupfersorten schon die Leitfähigkeit des Silbers nahezu erreicht hat, d. i. eine mehr als 61 mal größere Leitfähigkeit als die des Quecksilbers. (Der Werth 0,000 001 533 ist so wie der Werth 0,000 001 499 für Silber dem Kalender für Electrotechniker 1902 von Uppenborn entnommen, S. 45.)

[2]) Für gewöhnlichen Eisendraht kann man einen über 1,3 mal größeren Widerstand annehmen (Uppenborn, Kalender 1902, S. 45), also z. B. für 1 Kilometer 5 mm dicken Eisendrahtes etwa 6,6 Ω und für eine Telegraphenleitung von 1 km, da der Draht nicht ganz straff gespannt sein kann, wohl etwa 7 Ω.

[3]) Sitzungsbericht der bairischen Academie vom 5. November 1875, S. 287. Hier stehen nämlich für das Leitungsvermögen k der Schnee- und Regenwässer die Zahlen $k \cdot 10^{10} = 19{,}8$ und $k \cdot 10^{10} = 4{,}1$, bezogen auf Quecksilber.

Das reinste bis jetzt dargestellte Wasser[1]) hat bei 18° C. den specifischen Widerstand $23{,}5 \times 10^6$ und bei 0° C. $67{,}2 \times 10^6$, ein specifischer Widerstand, der sich zu dem des Kupfers ungefähr verhält wie ein Millimeter zum tausendfachen Umfang der Erde und dem theoretisch bestimmten specifischen Widerstande des absolut reinen Wassers bei 0° C. ($84{,}7 \times 10^6$) schon ziemlich nahe kommt[2]).

Einer noch höheren Größenordnung gehören die specifischen Widerstände der sogenannten Isolatoren an, z. B. Guttapercha (15°) mit 450×10^{12}, Holztheer (18°) mit 1700×10^{12}, Flintglas (15° C.) mit 20000×10^{12}, Paraffin (46°) mit 34000×10^{12}.

B. In der Praxis versteht man unter dem specifischen Widerstande eines Materiales häufig den Widerstand eines aus diesem Materiale geformten Prismas oder Cylinders von der Länge eines Meters und vom Querschnitte eines Quadratmillimeters, ausgedrückt in Ohm. Wir wollen diese technische Einheit mit dem Symbol $\Omega \frac{m}{mm^2}$ bezeichnen. Man erhält die auf diese Einheit bezogenen specifischen Widerstände, wenn man die unter A. besprochenen, auf die Einheit $10^9 C^2 S^{-1}$ bezogenen mit 10^4 multiplicirt.

Man erhält dann, giltig für 0°, für

Quecksilber (rein, 0°)	0,9407
Silber (rein, geglüht)	0,01499
Kupfer (reinstes)	0,01533
Messing[3])	0,069
Platin (geglüht)	0,0903
Eisen (reines)	0,097
Neusilber[4])	0,3
Manganin[4])	0,4
Constantan[4])	0,5

Dividirt man diese Zahlen durch 0,9407, so erhält man die Widerstände in Siemens'schen Einheiten (Quecksilbereinheiten, §. 44, Formel 125) ausgedrückt.

---

[1]) F. Kohlrausch und Ad. Heydweiller, Ueber reines Wasser; Sitzungsbericht der k. preuß. Academie der Wissenschaften vom 29. März 1894, S. 295 und 308.

[2]) Berechnet aus den in der citirten Abhandlung von F. Kohlrausch und Ad. Heydweiller, S. 295 und 308 angeführten Zahlen für die Leitfähigkeit im Vergleiche mit Quecksilber, bei 0° $0{,}014 \times 10^{-10}$, bei 18° $0{,}040 \times 10^{-10}$ und theoretisch bei 0° $0{,}0111 \times 10^{-10}$, entsprechend den specifischen Widerständen $67{,}2 \times 10^6$; $23{,}5 \times 10^6$; $84{,}7 \times 10^6$.

[3]) Von der Zusammensetzung 61,34 Cu; 37,41 Zn; 0,8 Pb; 0,11 Fe (Uppenborn, Kalender 1902, S. 45).

[4]) Von den oben angegebenen Zusammensetzungen.

C. Eine andere in der electrolytischen Praxis (zumal in England) gangbare Einheit für specifische Widerstände ist von W. H. Preece aufgestellt worden. Denken wir uns ein Prisma (Würfel) von der Länge eines Erdquadranten (10^9 cm) und vom Querschnitte gleich dem Quadrate der Länge eines Erdquadranten habe den Widerstand von einem Megohm (10^6 Ohm), so hätte das Material dieses Würfels den specifischen Widerstand einer Preece'schen Einheit, die ich mit PU (Preece unit) bezeichnen will. Bezeichnet man die Länge eines Erdquadranten, wie im §. 11, mit Q, so könnte man die Preece'sche Einheit allenfalls mit dem Symbol $10^6\,\Omega\,Q$ bezeichnen. Diese Einheit ist offenbar das 10^{15}fache von der Einheit $10^9\,C^2S^{-1}$ oder ΩC, und diese das 10^4fache von der Einheit $\Omega\,\frac{m}{mm^2}$, die selbst wieder das 10^5fache von der absoluten electromagnetischen C-G-S-Einheit der specifischen Widerstände C^2S^{-1} ist. Demnach wäre z. B. der specifische Widerstand der Guttapercha [1]) auszudrücken durch 0,45 ($10^6\,\Omega\,Q$) oder 450×10^{12} ($10^9\,C^2S^{-1}$) oder $4{,}5 \times 10^{18}\left(\Omega\,\frac{m}{mm^2}\right)$ oder endlich $0{,}45 \times 10^{24}\,(C^2S^{-1})$.

D. Sehr häufig endlich wird als Einheit der specifischen Widerstände der specifische Widerstand des Quecksilbers angenommen. Nach der am Schlusse des Absatzes B dieses Paragraphen gemachten Bemerkung ist klar, daß der in Siemens'schen Einheiten ausgedrückte Widerstand eines Prismas oder Cylinders von 1 m Länge und 1 mm^2 Querschnitt den auf Quecksilber bezogenen specifischen Widerstand des betreffenden Materiales darstellt. Man erhält demnach aus der im Absatz B dieses Paragraphen gegebenen Tabelle beispielsweise für

Quecksilber (rein, 0°)	1,000 00
Silber (rein, geglüht)	0,015 93
Kupfer (reinstes)	0,016 30 [2])
Messing	0,073 35
Platin (geglüht)	0,095 99
Eisen (reines)	0,103 11

[1]) Wenn wir eine dem Electrical Trades Directory entnommene Angabe zu Grunde legen.

In der Abhandlung: W. Siemens und C. W. Siemens, Umriß der Principien und des practischen Verfahrens bei der Prüfung submariner Telegraphenleitungen findet sich (S. 18) die Angabe, daß die verschiedenen Guttaperchasorten 0,5 trillionenmal bis 8 trillionenmal größere specifische Widerstände haben als Quecksilber. Die Abhandlung wurde der British Association in Oxford vorgetragen am 3. Juli 1860.

[2]) Genauer $\frac{0{,}01533}{0{,}9407} = 0{,}016296$.

Neusilber	0,318 91
Manganin	0,425 22
Constantan	0,531 52

als die auf Quecksilber bezogenen specifischen Widerstände.

Ein auf reines Quecksilber von der Temperatur 0° bezogener specifischer Widerstand eines Stoffes von der Temperatur t^0 soll mit ϱ'_t bezeichnet werden, während ϱ_t einen in Ohmcentimetern ($10^9 C^2 S^{-1}$) ausgedrückten specifischen Widerstand für die Temperatur t bedeuten soll, so, daß

$$\varrho'_t = 10630\, \varrho_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 129)$$

also z. B. für reinstes Kupfer $\varrho'_0 = 10630 \times 0{,}000\,001\,533 = 0{,}016\,30$, nämlich nach der gegebenen Definition $\varrho'_0 = \dfrac{0{,}000\,001\,533}{0{,}000\,094\,07}$.

46 **Leitungsfähigkeit** oder Leitfähigkeit[1]) nennt man den reciproken Werth eines specifischen Widerstandes. Je größer man die Einheit des specifischen Widerstandes gewählt hat, je kleiner also die Zahl ist, die den specifischen Widerstand eines gegebenen Materiales ausdrückt, desto größer wird die Zahl sein, die die Leitungsfähigkeit desselben Materiales angibt, und umgekehrt. So ist z. B. der specifische Widerstand des reinsten Kupfers in Ohmcentimetern ($10^9 C^2 S^{-1}$) 0,000 001 533 und dementsprechend das Leitungsvermögen $\dfrac{1}{0{,}000\,001\,533} = 652\,316$ oder in runder Zahl 65×10^4. Aus den vorausgeschickten Bemerkungen über die Größenverhältnisse der verschiedenen Einheiten für specifische Widerstände ergibt sich für die 10^4 mal kleinere technische Einheit der specifische Widerstand des reinsten Kupfers $= 0{,}015\,33\, \Omega \dfrac{m}{mm^2}$ und dem entsprechend das Leitvermögen $= \dfrac{1}{0{,}015\,33} = 65{,}2316$ oder in runder Zahl $= 65$.

Die Dimension der Leitungsfähigkeit muß vermöge der gegebenen Definition der reciproke Werth der Dimension des specifischen Widerstandes sein, also

$$(k) = \left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{l^2 t^{-1}} = l^{-2} t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 130)$$

wenn wir die Leitfähigkeit mit k bezeichnen. Folglich ist für das C-G-S-System

$$\text{Einheit der Leitfähigkeit} = \frac{1}{1\,(C^2 S^{-1})} = 1\,(C^{-2} S) \quad . \quad . \quad 131)$$

Diese Einheit entspricht also der absoluten electromagnetischen Einheit der specifischen Widerstände.

[1]) Auch Leitungsvermögen oder Leitvermögen genannt.

Der Ohmcentimeter-Einheit der specifischen Widerstände entspricht als Einheit der Leitfähigkeit offenbar

$$\frac{1}{10^9 C^2 S^{-1}} = 10^{-9} C^{-2} S = \frac{1}{\Omega C} = \Omega^{-1} C^{-1}$$

(nach §. 45)[1]).

Die der technischen Einheit und der Preece-Einheit der specifischen Widerstände entsprechenden Einheiten der Leitfähigkeit bezeichnen wir mit den Symbolen $1/\Omega \frac{m}{mm^2}$ und $1/10^6 \Omega Q$.

Man erhält also z. B. für die Guttaperchasorte, deren specifischer Widerstand bereits erwähnt worden ist, folgende Werthe

	$C^2 S^{-1}$	$\Omega \frac{m}{mm^2}$	$10^9 C^2 S^{-1}$	$10^6 \Omega Q$
$\varrho =$	$0{,}45 \times 10^{24}$	$4{,}5 \times 10^{18}$	450×10^{12}	0,45
	$C^{-2} S$	$1/\Omega \frac{m}{mm^2}$	$10^{-9} C^{-2} S$	$1/10^6 \Omega Q$
$k = \frac{1}{\varrho} =$	$2{,}2 \ldots \times 10^{-24}$	$0{,}22 \ldots \times 10^{-18}$	$2{,}2 \ldots \times 10^{-15}$	2,2 ...

Die Leitfähigkeit eines Stoffes im Vergleiche mit Quecksilber findet man natürlich, indem man die auf ein absolutes Maß bezogene Leitfähigkeit des Stoffes durch die auf gleiches Maß bezogene Leitfähigkeit des Quecksilbers dividirt, oder, weil die Leitfähigkeiten den specifischen Widerständen verkehrt proportional sind, indem man den auf irgend eine Einheit bezogenen specifischen Widerstand des Quecksilbers durch den auf dieselbe Einheit bezogenen specifischen Widerstand des untersuchten Stoffes dividirt; man findet also z. B. die Leitfähigkeit des reinsten Kupfers im Vergleiche mit Quecksilber entweder durch die Division $\frac{1}{0{,}000\,001\,533} : 10\,630 = \frac{652\,316}{106\,30} = 61{,}36 \ldots$ oder durch die Division $\frac{0{,}000\,094\,07}{0{,}000\,001\,533} = 61{,}36 \ldots$

Die Leitfähigkeit im Vergleiche mit Quecksilber findet man übrigens auch, indem man den reciproken Werth des in Siemens-Einheiten ausgedrückten Widerstandes eines Prismas oder Cylinders von 1 m Länge und 1 mm² Quer-

---

[1]) In F. Kohlrausch und L. Holborn, Leitvermögen der Electrolyte stehen für ΩC und $\frac{1}{\Omega C} = \Omega^{-1} C^{-1}$ die Bezeichnungen Ohm . cm und 1/Ohm . cm = $Ohm^{-1} . cm^{-1}$.

Für die Einheit der Leitfähigkeit ist auch die Bezeichnung Mho (Umkehrung des Namens Ohm) vorgeschlagen worden, doch werden wir von dieser Bezeichnung keinen Gebrauch machen.

schnitt von dem untersuchten Stoffe berechnet. Also z. B. wieder für reinstes Kupfer $\frac{1}{0{,}016\,296} = 61{,}36 \ldots$ [1]).

Die Leitfähigkeit von Kupfersorten pflegt man oft auch in Procenten der Leitfähigkeit des reinen Kupfers auszudrücken. Dementsprechend müßte man also das häufig verwendete Kupfer von 57 mal größerer Leitfähigkeit im Vergleiche mit Quecksilber als ein solches bezeichnen, das kaum 92,9 Proc. von der Leitfähigkeit des (bisher dargestellten) reinsten Kupfers besitzt, denn dieses leitet ja, wie wir gesehen haben, 61,36 mal besser als Quecksilber und man hat daher $100 \frac{57}{61{,}36} = 92{,}89$. So pflegt man es aber in der Praxis nicht zu nehmen, indem man ein etwas minderwerthiges Kupfer als „hundertprocentiges" gelten läßt, z. B. solches von nur 59 mal größerer Leitfähigkeit im Vergleiche mit Quecksilber. Unter dieser Voraussetzung würde dann das Kupfer von der Leitfähigkeit 57 im Vergleiche mit Quecksilber als ein 96,6 procentiges erscheinen.

Dem Kupfer von der Leitfähigkeit 57 (bei 0°) im Vergleiche mit Quecksilber entspricht bei 15° C. der specifische Widerstand $0{,}0175 = \frac{1}{57{,}1}\,\Omega$ und bei 0° C. der specifische Widerstand $0{,}01655 = \frac{1}{60{,}42}\,\Omega$, also in runder Zahl $\frac{1}{60}$

47 **Capacität.** Um auch für das electromagnetische Maßsystem Dimension und Einheit für die Capacität festzustellen, erinnern wir uns zunächst an die schon bei der Besprechung der electrostatischen Maße im §. 34 gegebene Definition.

Wir denken uns einen isolirten Leiter so geladen, daß die Potentialdifferenz zwischen dem Leiter und der Erde $= V$ ist. Da das electrische Potential auf der Erdoberfläche = Null angenommen wird [2]), sagt man in diesem Falle,

---

[1]) Siehe die Anmerkung §. 45, Absatz D.

Bezüglich der Abhängigkeit des Kupferwiderstandes von der Temperatur hat C. Hochenegg darauf aufmerksam gemacht, daß derselbe bei 15° C. so viele Ohm beträgt, wie bei 0° C. Siemens-Einheiten, wie man mit Berücksichtigung des Temperaturcoefficienten des Kupferwiderstandes, nämlich 0,004 für je 1° C., leicht findet. Siehe die Abhandlung: Ueber Berechnung electrischer Glühlichtleitungen von Carl Hochenegg.. Zeitschrift für Electrotechnik 1887, S. 13.

[2]) Hier kommt als Potentialwerth an der Erdoberfläche jener am Versuchsorte in Betracht, denn wir sind, wie die Beobachtungen der Erdströme ergeben haben, nicht berechtigt, dem Erdkörper in größerer Ausdehnung constante Potentialwerthe zuzuschreiben, sondern müssen vielmehr das Vorhandensein von mitunter sehr beträchtlichen Potentialdifferenzen annehmen. Jene zu beiden Seiten des Atlantischen Oceans, oft nicht mehr als 1 bis 2 Volt betragend, gelten als verhältnißmäßig klein und es können im Allgemeinen Punkte, die durch das Meer leitend mit einander verbunden sind, als nahezu von gleichem Potential betrachtet werden. (Fleeming Jenkin, Electricity and Magnetism; S. 365 und 366. — Deutsche Ausgabe von Exner S. 386 und 387.)

der Leiter sei zum Potential V geladen, also z. B. zum Potential von 1 Volt, wenn der Unterschied der Werthe der Potentialfunction auf dem Leiter und der Erde 1 Volt beträgt. Es sei Q die Electricitätsmenge, die als Ladung des Leiters erforderlich ist, damit diese Ladung in dem soeben dargelegten Sinne den Potentialwerth V erreiche; man nennt dann, übereinstimmend mit Formel 87 $K = \frac{Q}{V}$ die Capacität des Leiters und zwar, wenn Q und V in electromagnetischen Maßeinheiten ausgedrückt sind, die Capacität nach electromagnetischem Maße. Für diese erhalten wir demnach mittelst der Formeln 111 und 116:

$$\text{Capacität } K = \frac{Q}{V} = [l^{1/2} m^{1/2}] : [l^{1/2} m^{1/2} t^{-2}] = [l^{-1} t^2] \quad . \quad . \quad 132)$$

und für das C-G-S-System die electromagnetische

$$\text{Capacitätseinheit} = 1\,[C^{-1} S^2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 133)$$

Diese Einheit wäre jedoch für die Anwendung auf dem Gebiete der Electrotechnik unbequem groß, sie stellt eine Capacität vor, die ungefähr anderthalbbillionenmal größer ist, als die Capacität eines transatlantischen Kabels, von dem später die Rede sein wird. Man hat deßhalb eine tausendmillionenmal kleinere Capacitätseinheit, und zwar unter dem Namen Farad, als practische Einheit für Capacitäten eingeführt, nämlich

$$1 \text{ Farad} = 10^{-9}\,[C^{-1} S^2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 134)$$

übereinstimmend mit der im §. 11 für die practischen Einheiten gegebenen Regel [1]).

Wie aus dem angeführten Beispiele hervorgeht, ist auch das Farad noch eine nach den gewöhnlichen Erfahrungen unbequem große Capacitätseinheit. Man benutzt deßhalb gewöhnlich nur den millionten Theil des Farad unter dem Namen Microfarad als Capacitätseinheit, d. i. also

$$1 \text{ Microfarad} = 10^{-15}\,[C^{-1} S^2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 135)$$

Das Farad stellt die Capacität eines Leiters vor, der mit der Electricitätsmenge von 1 Coulomb zum Potentialwerthe von 1 Volt geladen wird, es ist nämlich

$$K = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \frac{10^{-1}\,[C^{1/2} G^{1/2}]}{10^{8}\,[C^{1/2} G^{1/2} S^{-2}]} = 10^{-9}\,[C^{-1} S^2] = \text{Farad}.$$

Im Vergleiche mit der electrostatischen Capacitätseinheit 1 [C] (Formel 89) ist auch das Microfarad noch immer sehr groß, denn es kommen, wie wir später nachweisen werden, 900000 electrostatische Capacitätseinheiten auf

[1]) Das $m = 10^{9a-11b}$ wird nämlich in diesem Falle $= 10^{9(-1)-11\times 0} = 10^{-9}$.

1 Microfarad, d. h. ein kugelförmiger Leiter müßte einen Halbmesser von 900 000 cm, also von 9 km haben, um die Capacität von 1 Microfarad zu besitzen, während eine Kugel von 1 cm Radius schon die Capacität 1 nach electrostatischem Maße hat. Die Capacität eines transatlantischen Kabels kann pro Kilometer auf nahezu 0,2 und im Ganzen etwa auf 800 Microfarad in runder Zahl und wohl auch darüber angenommen werden[1]).

Mit Rücksicht auf das angegebene Zahlenverhältniß der Capacitätseinheiten ist es leicht, die im §. 35 für electrostatisches Maß gegebenen Formeln auf Microfarad umzurechnen.

Die Formel 91 für den Plattencondensator geht dann über in

$$K = \frac{a\,i}{4\,\pi\,.\,9\,.\,10^5\,.\,\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 136)$$

mit Beibehaltung der in Formel 91 geltenden Bezeichnungen, oder

$$K = \frac{A\,i}{113\,\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 137)$$

wenn A die Fläche einer Belegung in Quadratmetern und η die Dicke des Diaphragmas in Millimetern ausdrückt.

Die Capacitäten unserer gewöhnlichen Leydener Flaschen sind, in Microfarad ausgedrückt, sehr klein. So beträgt z. B. die Capacität der im §. 35 besprochenen Leydener Flasche von der electrostatischen Capacität 1394 in electromagnetischem Maße $\frac{1394}{9 \times 10^5} = 0{,}001\,55$ Microfarad.

Ein aus Zinnfolie und paraffinirtem Papier hergestellter Plattencondensator von 1 Microfarad Capacität hat erfahrungsgemäß ungefähr 1,5 Quadratmeter Belegfläche bei etwa 0,1 Millimeter Dicke des paraffinirten Papieres. Wendet man hierauf die Formel 137 an, so müßte man annehmen, daß die Vertheilungszahl i für paraffinirtes Papier nahezu den Werth 8 hat.

Auch aus anderen Angaben über die mit derartigen Condensatoren gemachten Erfahrungen muß man dem paraffinirten Papier eine viel größere Vertheilungszahl als dem Paraffin selbst zuschreiben.

Bemerkenswerth ist ferner, daß man bei der Anfertigung der Condensatoren, wie A. v. Ettingshausen vielfach beobachtet hat, durch Zusammenpressen des Papiers die Capacität in viel höherem Grade (gleichwohl auf Kosten des Isolationswiderstandes) steigern kann, als es der bloßen Verminderung des Abstandes der Stanniolbelege zu entsprechen scheint[2]).

---

[1]) Näheres im II. Theile, §. 89.

[2]) Herr Prof. v. Ettingshausen, der mir seine reichen Erfahrungen über Condensatoren mitzutheilen die Güte hatte, hat aus Messungen an den theils ohne

Als Abkürzung für Microfarad ist die Bezeichnung mf gebräuchlich.

Die Formel 92 für die electrostatische Capacität eines Cylindercondensators oder z. B. eines isolirten Drahtes geht durch Division mit 900000 und indem man zugleich $L = 100000$ einsetzt, über in

$$K \text{ pro Kilometer} = 0{,}024 \frac{i}{log \frac{d_2}{d_1}} \quad \ldots \ldots \quad 138)$$

zur Berechnung der Capacität in Microfarad pro Kilometer

$$(L = 100000 \text{ cm} = 1 \text{ km}).$$

Für einen oberirdischen im Abstande h von der Erde horizontal ausgespannten Telegraphendraht von der Dicke d hat man in der Formel 138 für die kilometrische Capacität $i = 1$ und anstatt des Verhältnisses $\frac{d_2}{d_1}$ das Verhältniß $\frac{4h}{d}$ einzusetzen. (Formel 292.)

Electrische Energie. Der electrische Arbeitsvorrath (Energie) U eines 48
mit der Electricitätsmenge Q zum Potential V geladenen Leiters oder eines Leiters von der Capacität K, der zum Potential V geladen ist, beträgt nach §. 36

$$U = \frac{1}{2} VQ, \quad \text{oder} \quad U = \frac{1}{2} KV^2, \quad \text{oder} \quad U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{K}.$$

Setzt man, um die Verwandlungszahl (Dimension) für U zu finden, die dem electromagnetischen Systeme entsprechenden Verwandlungszahlen für V, Q und K aus den Formeln 116, 111 und 132 hier ein, so erhält man übereinstimmend

$$(U) = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}] \times [l^{1/2} m^{1/2}] = [l^{-1} t^2] \times [l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}]^2$$
$$= \frac{(l^{1/2} m^{1/2})^2}{l^{-1} t^2} = l^2 m t^{-2} \quad \ldots \ldots \quad 139)$$

also, der Natur der Sache entsprechend, wieder die Dimension einer Arbeitsgröße (Formel 43).

Man erhält die Arbeit in Erg ausgedrückt, wenn man für V, Q und K die absoluten Einheiten des C-G-S-Systems wählt. Drückt man hingegen diese Größen in den practischen Einheiten Volt, Coulomb und Farad aus, so erhält man den Zahlenwerth von U für die Einheit 10^7 Erg oder Joule, denn

$$10^3 C^{3/2} G^{1/2} S^{-2} \times 10^{-1} C^{1/2} G^{1/2} = 10^{-9} C^{-1} S^2 (10^3 C^{3/2} G^{1/2} S^{-2})^2$$
$$= (10^{-1} C^{1/2} G^{1/2})^2 : 10^{-9} C^{-1} S^2 = 10^7 C^2 G S^{-2} \quad \ldots \quad 140)$$

---

teils mit Pressung angefertigten Condensatoren für die Vertheilungszahl des paraffinirten Papieres Werthe von beziehungsweise 3 bis 6,5 berechnet. Die oben angeführte Angabe verdanke ich einer freundlichen Mittheilung von Siemens & Halske.

oder in Worten

$$\text{Volt} \times \text{Coulomb} = \text{Farad} \times (\text{Volt})^2 = \frac{(\text{Coulomb})^2}{\text{Farad}} = 10^7 \text{ Erg.}$$

Will man den Arbeitswerth in Meterkilogrammen erhalten, ſo iſt der in Erg berechnete Werth von U durch $9{,}81 \times 10^7$ zu dividiren (Formel 46).

Beiſpiel. Für die im §. 35 beſchriebene Leydener Flaſche fanden wir mit Benutzung der Formel für einen Plattencondenſator, die hier wegen der geringen Dicke des Diaphragmas eine hinreichende Annäherung gewährt, die electroſtatiſche Capacität 1394. Demnach beträgt die Capacität in Microfarad $\frac{1394}{9 \times 10^5} = 155 \times 10^{-5}$ und die Capacität in Farad 155×10^{-11} (nach §. 47). Die in den §§. 35 und 36 für dieſe Leydener Flaſche beiſpielsweiſe angenommene Ladung zum electroſtatiſchen Potential 216 entſpricht in electromagnetiſchem Maße $216 \times 300 = 64800$ Volt[1]).

Hieraus ergibt ſich für die Energie der Ladung (ſomit auch für das mechaniſche Aequivalent der Entladung, ſiehe §. 36) der Werth

$$\frac{1}{2} KV^2 = \frac{1}{2} \times 155 \times 10^{-11} \times 64800^2 \doteq 3{,}25 \text{ Joule},$$

alſo nahezu $^1/_3$ mkg, wie es im §. 36 die Rechnung nach electroſtatiſchen Maßen ergeben hat. Daſſelbe Reſultat hätte ſich auch aus $\frac{1}{2} VQ$ und aus $\frac{1}{2} \frac{Q^2}{K}$ ergeben müſſen.

Die Arbeit von 3,25 Joule iſt nach §. 23 ungefähr 0,77 Gramm-Calorien äquivalent.

Um die Ladung der beſchriebenen Leydener Flaſche von der Capacität 155×10^{-11} Farad zum Potential 64800 Volt zu erzielen, iſt die Electricitätsmenge $155 \times 10^{-11} \times 64800$ oder genauer $\frac{1394}{9 \times 10^{11}} \times 64800 = 0{,}000100368$, alſo rund 0,0001 Coulomb erforderlich[2]), woraus zugleich hervorgeht, daß die Electricitätsmenge von einem Coulomb hinreichend wäre, um nahezu zehntauſend Leydener Flaſchen, wie die beſchriebene, zum Potential 64800 Volt zu laden.

---

[1]) Wie ſchon wiederholt bemerkt worden iſt und ſpäter (§. 52) nachgewieſen werden ſoll, iſt eine electroſtatiſche Spannungseinheit = 300 Volt.

[2]) Im §. 52 wird nachgewieſen, daß ein Coulomb $= 3 . 10^9$ electroſtatiſchen Quantitätseinheiten iſt. In der That iſt $0{,}000100368 \times 3 . 10^9 = 301104 = 1394 \times 216$, was wir früher (§. 35) für electroſtatiſches Maß erhalten haben.

Electrische Arbeit. Bei der im vorhergehenden Paragraphen be- 49
sprochenen Entladung eines mit der Electricitätsmenge Q zum Potential V geladenen Leiters (derselbe kann auch die eine Belegung eines Condensators sein, während die andere mit der Erde leitend verbunden ist) sinkt das Ladungspotential während der Entladung bis auf 0 herab. Findet hingegen eine Electricitätsbewegung in der Art statt, daß die ganze Electricitätsmenge Q von einem constanten Potentialwerthe V auf den Potentialwerth 0 gebracht wird (wie es z. B. bei einer Batterie zutrifft, die einerseits mit einer Telegraphenlinie und anderseits mit der Erde verbunden ist), so beträgt die dabei geleistete electrische Arbeit nicht, wie in dem im vorhergehenden Paragraphen betrachteten Falle $\frac{1}{2} VQ$, sondern VQ, und sie ist allgemein

$$U = (V_1 - V_2) Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 141)$$

wenn eine Electricitätsmenge Q bei ihrer Bewegung von einem constanten Potentialniveau V_1 auf ein niedrigeres constantes Potentialniveau V_2 übergeht, wie z. B. von der positiven Polklemme einer Batterie durch einen Draht von entsprechendem Widerstande zur negativen Polklemme. Die Dimension des Ausdruckes ist natürlich wieder die eines Arbeitswerthes:

$$(U) = l^{3/2} m^{1/2} t^{-2} \times l^{1/2} m^{1/2} = l^2 m t^{-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 142)$$

Die C-G-S-Einheit der electrischen Arbeit ist im electromagnetischen Systeme diejenige Arbeit, die beim Uebergange der Electricitätseinheit 1 ($C^{1/2} G^{1/2}$) von einem Potentialniveau auf ein um die Einheit der Potentialwerthe 1 ($C^{3/2} G^{1/2} S^{-2}$) niedrigeres geleistet wird. Diese Arbeit entspricht einem Erg, nämlich

$$\text{Absolute electrische Arbeitseinheit} = 1\,(C^{3/2} G^{1/2} S^{-2}) \times 1\,(C^{1/2} G^{1/2})$$
$$= 1\,(C^2 G S^{-2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 143)$$

Nimmt man jedoch für Electricitätsmengen und Potentialwerthe die practischen Einheiten Coulomb und Volt, so erhält man die Arbeitswerthe in der practischen Arbeitseinheit, die Volt-Coulomb genannt wird, ausgedrückt, nämlich in der Einheit

$$1 \text{ Volt-Coulomb} = 10^3 C^{3/2} G^{1/2} S^{-2} \times 10^{-1} C^{1/2} G^{1/2}$$
$$= 10^7 C^2 G S^{-2} = 1 \text{ Joule} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 144)$$

Diese Arbeit wird also geleistet bei dem Uebergange der Electricitätsmenge eines Coulomb auf ein um ein Volt niedrigeres Potentialniveau.

Will man eine in Volt-Coulomb oder Joule ausgedrückte electrische Arbeit auf Meterkilo umrechnen, so hat man mit Rücksicht auf Formel 46 durch 9,81 zu dividiren.

Ferner folgt aus §. 23, daß einem Joule nahezu[1]) 0,24 Gramm-Calorien äquivalent sind, d. h. durch eine electrische Arbeit vom Betrage eines Volt-Coulomb oder Joule kann eine Wärmemenge von 0,24 Gramm-Calorien erzeugt werden, sowie umgekehrt durch einen Wärmeaufwand von 0,24 Gramm-Calorien ein electrischer Arbeitsvorrath (electrische Energie) vom Betrage eines Volt-Coulomb oder Joule hervorgerufen werden kann, entsprechend der Erhebung der Electricitätsmenge von einem Coulomb auf ein um ein Volt höheres Potentialniveau.

Man hat eine Electricitätsmenge Q, deren Potentialwerth um eine gewisse Potentialdifferenz $V_1 - V_2 = H$ erniedrigt oder erhöht wird, wobei im ersteren Falle eine electrische Arbeit QH geleistet wird, im zweiten Falle aber eine ebenso große Arbeit (z. B. durch Wärmeverbrauch) aufgewendet werden muß, auch „Electricitätsgewicht" genannt (Briot), um auf die Analogie mit der mechanischen Arbeit hinzuweisen, die geleistet wird, oder aufgewendet werden muß, wenn ein Gewicht Q um einen Höhenunterschied H herabsinkt oder um denselben Höhenunterschied gehoben wird.

Findet eine Electricitätsbewegung in der Art statt, daß eine bestimmte Electricitätsmenge, die wir in diesem Falle J nennen wollen, in jeder Zeiteinheit (Secunde) von einem Potentialwerthe V_1 auf einen niedrigeren V_2 übergeht, so stellt das Product $(V_1 - V_2)J$ eine in jeder Zeiteinheit geleistete electrische Arbeit dar, also eine Größe, die wir als electrische Arbeitsstärke oder Leistung bezeichnen und im folgenden Paragraphen näher betrachten wollen.

50 **Stromleistung.** Schon in dem Abschnitte über die electrostatischen Maße ist (§. 39) gezeigt worden, daß die electrische Arbeitsstärke, die wir Stromleistung nennen, ausgedrückt werden kann: entweder durch das Product einer Stromstärke mit einer Potentialdifferenz (Formel 102), oder durch das Product des Quadrates einer Stromstärke mit einem Widerstande (Formel 103) oder endlich durch den Quotienten des Quadrates einer Potentialdifferenz durch einen Widerstand (Formel 104). Es sollen nun mit Benutzung der in den §§. 40, 43 und 44 gegebenen Definitionen die electromagnetischen Einheiten für Stromstärke, Potentialdifferenz und Widerstand in diese Ausdrücke eingeführt werden, um die Einheit für Stromleistung festzustellen.

Vorerst soll aber noch der allgemeine Nachweis geliefert werden, daß die angeführten Ausdrücke für die Stromleistung in der That von der Dimension einer Arbeitsstärke $l^2 m t^{-3}$ (Formel 57) sind.

---

[1]) Der genauere Werth ist 0,2387, wenn 4,189 Joule als Aequivalenzwerth der 15° Gramm-Calorie angenommen wird.

Wir betrachten die Arbeit, die in einem von zwei Querschnitten des Stromkreises, in denen die Potentialwerthe V_1 und V_2 bestehen, begrenzten Theile vom Widerstande R bei einer Stromstärke J in jeder Secunde geleistet wird. Wir erhalten dann, indem wir $V_1 - V_2 = H$ setzen, vermöge $P = JH$ (Formel 102) und mit Rücksicht auf die Ausdrücke 107 und 116 für J und H:

$$(JH) = (P) = l^{1/2} m^{1/2} t^{-1} \times l^{3/2} m^{1/2} t^{-2} = l^2 m t^{-3} \quad . \quad . \quad 145\text{I})$$

also, wie es in der Natur der Sache liegt, den Ausdruck einer Arbeitsstärke oder Leistung. Ebenso erhält man vermöge $P = J^2 R$ (Formel 103) mit Zuziehung der Formeln 107 und 120

$$(J^2 R) = (P) = [l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}]^2 \times [l t^{-1}] = l^2 m t^{-3} \quad . \quad . \quad 145\text{II})$$

und endlich vermöge $P = \frac{H^2}{R}$ (Formel 104) mittelst der Formeln 116 u. 120:

$$\left(\frac{H^2}{R}\right) = (P) = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}]^2 : [l t^{-1}] = l^2 m t^{-3} \quad . \quad . \quad . \quad 145\text{III})$$

Führt man die in den Formeln 110, 118 und 122 unter den Namen Ampère, Volt und Ohm definirten Maße ein, so erhält man zunächst

$$(P) = (JH) = 10^{-1} [C^{1/2} G^{1/2} S^{-1}] \times 10^8 [C^{3/2} G^{1/2} S^{-2}]$$
$$= 10^7 [C^2 G S^{-3}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 146)$$

als Ausdruck für die Einheit der electrischen Arbeitsstärke; diese Arbeitsstärke, die durch einen Strom von 1 Ampère bei einer electromotorischen Kraft (oder Potentialdifferenz an den Begrenzungen des Leiters vom Widerstande R) von 1 Volt geleistet wird, heißt 1 Voltampère und beträgt, wie wir soeben gesehen haben, 10^7 Erg pro Secunde oder 1 Watt (Formel 58).

Dasselbe Resultat ergibt sich auch, wenn man die electrische Arbeitsstärke durch Stromstärke und Widerstand (Ampère und Ohm) oder endlich durch electromotorische Kraft und Widerstand (Volt und Ohm) ausdrückt; nämlich

$$(P) = (J^2 R) = (10^{-1} [C^{1/2} G^{1/2} S^{-1}])^2 \times 10^9 [C S^{-1}] = 10^7 [C^2 G S^{-3}] \quad 147)$$

$$(P) = \frac{H^2}{R} = (10^8 [C^{3/2} G^{1/2} S^{-2}])^2 : 10^9 [C S^{-1}] = 10^7 [C^2 G S^{-3}] \quad . \quad 148)$$

Ist also eine electrische Arbeitsstärke in den vorgenannten practischen Einheiten in einer der drei Formen

Ampère × Volt oder (Ampère)² × Ohm oder (Volt)² : Ohm

gegeben, so kann sie immer als in Watt gegeben angesehen werden.

Eine electrische Leistung von HJ Voltampère, die allenfalls auch veränderlich sein kann, verrichtet in der Zeit t eine Arbeit

$$L = \int_0^t HJ\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 149)$$

Voltampère-Stunden oder Wattstunden, wenn die Zeit in Stunden gemessen wird. Ist aber die Secunde als Zeiteinheit angenommen, dann bedeutet das vorstehende Integral Voltampère-Secunden oder Volt-Coulomb oder Wattsecunden oder Joule.

In der Folge sollen electromotorische Kräfte meist mit e bezeichnet werden (während H in der Regel zur Bezeichnung magnetischer Feldstärken dient). Mit Einführung dieser Bezeichnung und wenn man zugleich i statt J schreibt, ergibt sich die meist gebräuchliche Form des Ausdruckes für eine electrische Stromarbeit

$$L = \int_0^t e i dt \quad \ldots \ldots \ldots \quad 150)$$

welchem Ausdrucke wir schon im §. 24 (Formel 67) begegnet sind. (Siehe auch die Schlußbemerkung im §. 39.)

Dividirt man die Zahl der Watt einer Stromleistung durch 100, oder 1000, oder 736, so erhält man die Leistung des electrischen Stromes in Hectowatt, oder in Kilowatt, oder in Pferdestärken (§. 24).

Man nennt die einer electrischen Leistung entsprechenden Pferdestärken wohl auch *electrische Pferdestärken*, zur Unterscheidung von den *mechanischen Pferdestärken* die (z. B. bei dem Betriebe einer Dynamomaschine) aufgewendet werden müssen, um jene electrischen Pferdestärken hervorzubringen, oder zur Unterscheidung von den mechanischen Pferdestärken, die durch die Aufwendung jener electrischen Pferdestärken (z. B. beim Betriebe eines Motors) gewonnen werden können. In gleichem Sinne kann man auch von electrischen und von mechanischen Watt, oder Hectowatt, oder Kilowatt sprechen.

Bei der Dynamomaschine nennt man den Quotienten der erzeugten electrischen Leistung durch die aufgewendete mechanische Leistung den *Wirkungsgrad* der Maschine, und zwar den mechanischen oder auch commerciellen Wirkungsgrad, zur Unterscheidung vom electrischen Wirkungsgrade, von dem später[1]) die Rede sein soll. Hingegen ist der Wirkungsgrad eines electrischen Motors der Quotient der erzeugten mechanischen Leistung durch die aufgewendete electrische Leistung.

Die erzeugte Leistung pflegt man auch die *Nutzleistung* oder den *Nutzeffect* zu nennen. Der mit 100 multiplicirte Wirkungsgrad heißt der *Wirkungsgrad in Procenten*. Bei guten Maschinen beträgt der Wirkungsgrad über 90 Proc.

Beispielsweise sei noch folgendes angeführt.

Bei einer Dynamomaschine erhält man von einer mechanischen Pferde-

[1]) II. Theil, §. 79 (Güteverhältniß).

kraft bei den nachstehend angegebenen Wirkungsgraden in Procenten die beigefügten Anzahlen von Watt als electrischen Nutzeffect

70	Proc.	515
75	„	552
80	„	589
85	„	626
90	„	662
95	„	699

V.

Vergleichung des electrostatischen und des electromagnetischen Maßsystemes.

Verhältniß der Dimensionen. Die nachstehende Tabelle gibt eine 51
Uebersicht der Dimensionsausdrücke in beiden Maßsystemen für Quantität, Strom, Capacität, Potential und Widerstand und der Quotienten, die man erhält, wenn man für irgend eine dieser Größenarten den Dimensionsausdruck des electrostatischen Systemes durch jenen des electromagnetischen dividirt.

Größenart	Dimension im electrostatischen System	Dimension im electromagnetischen System	Quotient	Nummern der Formeln
Quantität . . .	$l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}$	$l^{1/2} m^{1/2}$	$l t^{-1}$	80; 111
Strom	$l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}$	$l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}$	$l t^{-1}$	82; 107
Capacität . . .	l	$l^{-1} t^2$	$(l t^{-1})^2$	88; 132
Potential . . .	$l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}$	$l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}$	$l^{-1} t$	84; 116
Widerstand . . .	$l^{-1} t$	$l t^{-1}$	$(l^{-1} t)^2$	99; 120

Das Symbol $l t^{-1}$ bedeutet (nach Formel 23) eine Geschwindigkeit v; wir können demnach $l t^{-1} = v$; $(l t^{-1})^2 = v^2$; $l^{-1} t = \frac{1}{v}$ und $(l^{-1} t)^2 = \frac{1}{v^2}$ setzen und erhalten dann

$$\frac{Q'}{Q} = v; \frac{J'}{J} = v; \frac{K'}{K} = v^2; \frac{V'}{V} = \frac{1}{v}; \frac{R'}{R} = \frac{1}{v^2} \quad 151)$$

wenn wir die accentuirten Buchstaben zur Bezeichnung der Dimensionen der

aufgezählten Größenarten im electrostatischen Systeme und die nicht accentuirten in analoger Weise für das electromagnetische System anwenden.

52 **Verhältniß der Einheiten.** Aus dem Verhältnisse $\frac{Q'}{Q} = v$ schließen wir, daß umgekehrt die Einheit der Q' $v$mal kleiner sein müsse als die Einheit der Q; desgleichen schließen wir z. B. aus $\frac{R'}{R} = \frac{1}{v^2}$, daß die Einheit der R' v^2mal größer sein müsse, als die Einheit der R, d. h. wir können im Allgemeinen sagen, daß sich die Einheiten einer Größenart in beiden Maßsystemen umgekehrt wie die betreffenden Dimensionen verhalten[1]).

Um also das Verhältniß der Einheiten beider Maßsysteme für eine bestimmte Größenart (z. B. Quantität) und somit (vermöge der in den Formeln 151 dargelegten Beziehungen) auch für die übrigen in der vorstehenden Tabelle vorkommenden Größenarten zu ermitteln, kommt es darauf an, irgend eine solche Größe das eine Mal nach der Einheit des electrostatischen Systemes und das andere Mal nach der Einheit des electromagnetischen Systemes zu messen und die beiden gefundenen Zahlenwerthe zu vergleichen. Der Quotient des ersteren Resultates durch das letztere gibt dann das der Formel 151 entsprechende Verhältniß und der reciproke Werth dieses Quotienten gibt das gesuchte Verhältniß der Einheiten beider Systeme für die betreffende Größenart, d. h. die Zahl, die angibt, wie viele electromagnetische Einheiten der besagten Größenart auf eine electrostatische Einheit kommen.

Mißt man z. B. die electromotorische Kraft eines Daniell'schen Elementes erst mit Hilfe eines absoluten Electrometers[2]), so erhält man in C-G-S-Einheiten des electrostatischen Systemes etwa den Werth 0,0036[3]). Andererseits ist dieselbe Größe (nach verschiedenen Methoden) auch nach electromagnetischem Maße gemessen worden und hat (siehe §. 43) den Werth 1,088 Volt, also in absoluten electromagnetischen C-G-S-Einheiten (Formel 118 und 117) den Werth $1{,}088 \times 10^8 = 108800000$ ergeben. Wir erhalten daher im Sinne der Formeln 151

$$\frac{V'}{V} = \frac{0{,}0036}{108800000} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 152)$$

der reciproke Werth dieses Verhältnisses ist also das gesuchte Verhältniß der

---

[1]) Vergl. Everett, Units and physical Constants, S. 132.

[2]) F. Kohlrausch, Lehrbuch der practischen Physik (1901), S. 517.

[3]) Vergl. Everett, Units and physical Constants, S. 146 und Exner, Bestimmung des Verhältnisses u. s. w. Sitzungsberichte der Wiener Academie. Bd. 86 (1882), S. 106.

Einheiten, nämlich $\frac{108800000}{0{,}0036} = 3 . 10^{10}$ in runder Zahl, d. h. die electrostatische Einheit der Potentialwerthe ist im C-G-S-System $3 . 10^{10}$ mal größer als die electromagnetische.

Aehnliche Bestimmungen haben R. Kohlrausch und W. Weber durch vergleichende Quantitätsmessungen nach beiderlei Maßeinheiten, ferner Ayrton und Perry und auch Klemenčič durch vergleichende Capacitätsmessungen u. s. w. ausgeführt. Es würde zu weit führen, hier auf diese Bestimmungen näher einzugehen. Es soll daher nur das Princip der vergleichenden Quantitätsmessungen noch kurz erwähnt werden. Wir denken uns die Ablenkung einer Magnetnadel gemessen, die durch die Entladung einer Leydener Flasche, die eine nach electrostatischem Maße gemessene Electricitätsmenge enthielt, bewirkt worden war. Sodann denken wir uns die Zeit ermittelt, während der eine Strom von der Stärke der electromagnetischen Stromeinheit geschlossen sein muß, um die Nadel desselben Galvanometers ebenso stark abzulenken. Wir haben dann in beiden Fällen gleiche Electricitätsmengen zur Wirkung gebracht. Da nun die in der Zeiteinheit (Secunde) durch den Querschnitt fließende Electricitätsmenge beim zweiten Versuche nichts anderes ist, als die Electricitätsmenge Eins nach electromagnetischem Maße, so erfahren wir aus der erforderlich gewesenen Dauer des Stromschlusses zugleich, wie viele Quantitätseinheiten des electromagnetischen Maßsystemes erforderlich gewesen sind, um dieselbe Wirkung auf die Galvanometernadel hervorzubringen, wie die aus der Leydener Flasche entladene electrostatisch gemessene Electricitätsmenge. Aus dieser Bestimmung ergab sich (wenn wir die gefundenen Zahlen auf C-G-S-Einheiten reduciren), daß bei einem Strome, der der absoluten electromagnetischen Stromeinheit (Formel 108) gleich ist, in jeder Secunde 15557 Millionen electrostatische Einheiten positiver Electricität durch einen Querschnitt des Leiters gehen [1]). Da nun gleichzeitig im Stromkreise einer Kette ebenso viel negative Electricität in entgegengesetzter Richtung sich bewegt, können wir sagen, daß im Ganzen 2×15557 Millionen, also in runder Zahl $3 . 10^{10}$ electrostatische Electricitätseinheiten (Formel 81) auf eine electromagnetische Electricitätseinheit (Formel 112) kommen. Die in den Formeln 151 mit v bezeichnete Verhältnißzahl hat also unter Voraussetzung der C-G-S-Grundmasse in runder Zahl den Werth

$$v = 3 . 10^{10} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 153)$$

[1]) W. Weber und R. Kohlrausch, Electrodynamische Maßbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitätsmessungen auf mechanisches Maß. — Ferner Voigt in Wiedemann's Annalen, 2. Bd., S. 476. — Siehe A. Wüllner's Lehrbuch der Experimentalphysik, 5. Auflage, 3. Bd., S. 1251. — In Weber's Abhandlung (S. 261) steht die Zahl $155370 . 10^6$, bezogen auf das Mm.-Mg.-Sec.-System. Wüllner setzt dafür nach Voigt's Correctur $155570 . 10^6$, oder auf das C-G-S-System umgerechnet, $15557 . 10^6$.

aufgezählten Größenarten im electrostatischen Systeme und die nicht accentuirten in analoger Weise für das electromagnetische System anwenden.

152 **Verhältniß der Einheiten.** Aus dem Verhältnisse $\frac{Q'}{Q} = v$ schließen wir, daß umgekehrt die Einheit der Q' v mal kleiner sein müsse als die Einheit der Q; desgleichen schließen wir z. B. aus $\frac{R'}{R} = \frac{1}{v^2}$, daß die Einheit der R' v^2 mal größer sein müsse, als die Einheit der R, d. h. wir können im Allgemeinen sagen, daß sich die Einheiten einer Größenart in beiden Maßsystemen umgekehrt wie die betreffenden Dimensionen verhalten[1]).

Um also das Verhältniß der Einheiten beider Maßsysteme für eine bestimmte Größenart (z. B. Quantität) und somit (vermöge der in den Formeln 151 dargelegten Beziehungen) auch für die übrigen in der vorstehenden Tabelle vorkommenden Größenarten zu ermitteln, kommt es darauf an, irgend eine solche Größe das eine Mal nach der Einheit des electrostatischen Systemes und das andere Mal nach der Einheit des electromagnetischen Systemes zu messen und die beiden gefundenen Zahlenwerthe zu vergleichen. Der Quotient des ersteren Resultates durch das letztere gibt dann das der Formel 151 entsprechende Verhältniß und der reciproke Werth dieses Quotienten gibt das gesuchte Verhältniß der Einheiten beider Systeme für die betreffende Größenart, d. h. die Zahl, die angibt, wie viele electromagnetische Einheiten der besagten Größenart auf eine electrostatische Einheit kommen.

Mißt man z. B. die electromotorische Kraft eines Daniell'schen Elementes erst mit Hilfe eines absoluten Electrometers[2]), so erhält man in C-G-S-Einheiten des electrostatischen Systemes etwa den Werth 0,0036[3]). Andererseits ist dieselbe Größe (nach verschiedenen Methoden) auch nach electromagnetischem Maße gemessen worden und hat (siehe §. 43) den Werth 1,088 Volt, also in absoluten electromagnetischen C-G-S-Einheiten (Formel 118 und 117) den Werth $1{,}088 \times 10^8 = 108800000$ ergeben. Wir erhalten daher im Sinne der Formeln 151

$$\frac{1}{v} = \frac{0{,}0036}{108800000} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 152)$$

der reciproke Werth dieses Verhältnisses ist also das gesuchte Verhältniß der

[1]) Vergl. Overbeck, Units and physical Constants, S. 132.
[2]) [illegible] 1901), S. 517.
[3]) Vergl. Overbeck, Units and physical Constants, S. 146 und Exner, [illegible] der Wiener Academie, [illegible]

Einheiten, nämlich $\frac{108800000}{0{,}0036} = 3 . 10^{10}$ in runder Zahl, d. h. die electrostatische Einheit der Potentialwerthe ist im C-G-S-System $3 . 10^{10}$ mal größer als die electromagnetische.

Aehnliche Bestimmungen haben R. Kohlrausch und W. Weber durch vergleichende Quantitätsmessungen nach beiderlei Maßeinheiten, ferner Ayrton und Perry und auch Klemenčič durch vergleichende Capacitätsmessungen u. s. w. ausgeführt. Es würde zu weit führen, hier auf diese Bestimmungen näher einzugehen. Es soll daher nur das Princip der vergleichenden Quantitätsmessungen noch kurz erwähnt werden. Wir denken uns die Ablenkung einer Magnetnadel gemessen, die durch die Entladung einer Leydener Flasche, die eine nach electrostatischem Maße gemessene Electricitätsmenge enthielt, bewirkt worden war. Sodann denken wir uns die Zeit ermittelt, während der eine Strom von der Stärke der electromagnetischen Stromeinheit geschlossen sein muß, um die Nadel desselben Galvanometers ebenso stark abzulenken. Wir haben dann in beiden Fällen gleiche Electricitätsmengen zur Wirkung gebracht. Da nun die in der Zeiteinheit (Secunde) durch den Querschnitt fließende Electricitätsmenge beim zweiten Versuche nichts anderes ist, als die Electricitätsmenge Eins nach electromagnetischem Maße, so erfahren wir aus der erforderlich gewesenen Dauer des Stromschlusses zugleich, wie viele Quantitätseinheiten des electromagnetischen Maßsystemes erforderlich gewesen sind, um dieselbe Wirkung auf die Galvanometernadel hervorzubringen, wie die aus der Leydener Flasche entladene electrostatisch gemessene Electricitätsmenge. Aus dieser Bestimmung ergab sich (wenn wir die gefundenen Zahlen auf C-G-S-Einheiten reduciren), daß bei einem Strome, der der absoluten electromagnetischen Stromeinheit (Formel 108) gleich ist, in jeder Secunde 15557 Millionen electrostatische Einheiten positiver Electricität durch einen Querschnitt des Leiters gehen[1]). Da nun gleichzeitig im Stromkreise einer Kette ebenso viel negative Electricität in entgegengesetzter Richtung sich bewegt, können wir sagen, daß im Ganzen 2×15557 Millionen, also in runder Zahl $3 . 10^{10}$ electrostatische Electricitätseinheiten (Formel 81) auf eine electromagnetische Electricitätseinheit (Formel 112) kommen. Die in den Formeln 151 mit v bezeichnete Verhältnißzahl hat also unter Voraussetzung der C-G-S-Grundmasse in runder Zahl den Werth

$$v = 3 . 10^{10} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 153)$$

[1]) W. Weber und R. Kohlrausch, Electrodynamische Maßbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitätsmessungen auf mechanisches Maß. — Ferner Voigt in Wiedemann's Annalen, 2. Bd., S. 476. — Siehe A. Wüllner's Lehrbuch der Experimentalphysik, 5. Auflage, 3. Bd., S. 1251. — In Weber's Abhandlung (S. 261) steht die Zahl $155370 . 10^6$, bezogen auf das Mm.-Mg.-Sec.-System. Wüllner setzt dafür nach Voigt's Correctur $155570 . 10^6$, oder auf das C-G-S-System umgerechnet, $15557 . 10^6$.

Fallen auch bei chemisch ungleichartigen Körpern stattfindet, hat Newton durch Pendelversuche nachgewiesen [1]).

Auch über das Verhältniß der Begriffe „Schwere" und „Gewicht" mögen einige Bemerkungen hier Platz finden.

Im engeren und ursprünglichen Sinne des Wortes bezeichnet „Schwere" die Eigenschaft eines jeden Körpers, daß er und jedes seiner Theilchen das Bestreben hat, zur Erde zu fallen, angetrieben durch eine der Trägheit (Masse) proportionale Kraft, die man Schwerkraft nennt. Die im Schwerpunkte des Körpers angreifende Resultirende der parallelen Schwerkräfte aller Körpertheilchen nennt man [2]) das „Gewicht" des Körpers. Dabei gilt (§. 15) als internationale Einheit das Gewicht einer Volumseinheit Wassers größter Dichte bei der Normalbeschleunigung der Schwere.

Durch Newton's Entdeckung der allgemeinen Schwere [3]) ist der Begriff

---

Trägheit der Körper vergleichen kann. Dabei stellt sich heraus, daß die Trägheitswerthe der Körper sich wie deren Gewichte und somit auch wie deren Massen verhalten, wie es auch sein muß, wenn man die Materie (mit Andreas v. Ettingshausen) als „das Träge im Raume" betrachtet. Nimmt man die Trägheit einer Volumseinheit Wassers größter Dichte als Einheit der Trägheitswerthe an, so werden Trägheit, Gewicht und Masse eines Körpers durch dieselbe Zahl ausgedrückt, wobei hinsichtlich des Gewichtes die Normal-Acceleration der Schwere (§. 15) vorausgesetzt wird.

[1]) Nachdem Galilei im Dome zu Pisa beobachtet hatte, daß leichte und schwere an gleichlangen Ketten hängende Kronleuchter gleich schnell schwingen, schloß er daraus, daß leichte und schwere Körper auch gleich schnell fallen müssen, was seine am schiefen Thurme zu Pisa angestellten Fallversuche auch bestätigt haben. Hierher gehören auch seine später (von 1592 an) in Padua ausgeführten feineren Pendelbeobachtungen und Fallversuche auf schiefer Ebene.

Die Unabhängigkeit der Fallbeschleunigung von der chemischen Beschaffenheit der Körper hat Newton durch Versuche mit gleichlangen Pendeln aus verschiedenen Materialien, die bei gehöriger Berücksichtigung des Luftwiderstandes gleiche Schwingungsdauer zeigen, nachgewiesen. Hierzu eignen sich gleich lange Fadenpendel mit gleichgroßen Pendelkugeln, die verschiedenartige Materialien enthalten. Uebrigens wäre noch zu bemerken, daß auch schon bei den Fallversuchen von Galilei verschiedenartige Materialien verwendet wurden. — Näheres hierüber findet man außer in den bereits citirten Werken auch in Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung; Rosenberger, Geschichte der Physik; Whewell, Geschichte der inductiven Wissenschaften, übersetzt von J. Littrow.

[2]) Vergl. Andreas v. Ettingshausen, Anfangsgründe der Physik.

[3]) Newton hat uns, ausgehend von der Vergleichung der Mondbewegung mit dem Fallen irdischer Körper, zur Erkenntniß geführt, daß die Weltkörper sich so bewegen, als wenn zwischen je zweien von ihnen eine den Massen direct und dem Quadrate des Abstandes verkehrt proportionale gegenseitige Anziehung wirksam wäre, wobei der Proportionalitätsfactor (§. 17) jedenfalls für alle Körper unseres Planetensystems, wahrscheinlich aber für alle Körper, constant ist. Dabei wollen wir jedoch ausdrücklich bemerken, daß Newton das thatsächliche Vorhandensein einer solchen anziehenden Fernwirkung nicht behauptet hat. Die vorsichtige Ausdrucksweise Newton's steht einer Negation der Fernwirkung (Faraday) schon sehr nahe.

der Schwere wesentlich erweitert worden. Die daraus sich ergebenden Folgerungen mußten, wie E. Mach[1]) treffend hervorgehoben hat, zuerst zu einer klaren Trennung der Begriffe Masse und Gewicht führen, da man ja jetzt einsehen mußte, daß demselben Körper (also derselben Masse), je nach seiner Lage im Weltraume, sehr verschiedene Beschleunigungen zu Theil werden, also auch sehr verschiedene Gewichte zukommen können.

Während also die Trägheit (und somit die Masse) eines Körpers unter allen Verhältnissen ungeändert bleibt, kann die Resultirende aller auf ihn wirkenden Gravitationskräfte, also sein „Gewicht" im weitesten Sinne des Wortes, sehr verschiedene Werthe annehmen und auch verschwindend klein werden[2]).

Aeltere Maßsysteme. Dem Bestreben nach der Herstellung eines ein- 54
heitlichen Maßsystemes begegnen wir schon in sehr früher Zeit. Bei den Chaldäern, die Tag und Nacht in je 12 Stunden theilten, diente als Grundlage für das Gewichtssystem unter dem Namen „Talent" das Gewicht einer binnen einer bestimmten Zeit aus einer Normal-Wasseruhr ausgeflossenen Wassermenge und die Kante des das Volumen dieser Wassermenge darstellenden Würfels als Längeneinheit. Aus dieser gingen die alte heilige Elle, die Elle des Nilmessers, als größeres und verschiedene Fuße als kleinere Maße hervor. Das Talent war auch die Grundlage des Münzwesens[3]). Wenn man annehmen könnte, daß das chaldäische Talent nicht viel von dem sehr gebräuch-

---

[1]) Die Mechanik in ihrer Entwickelung; 4. Auflage (1901), S. 200.

[2]) Man denke sich beispielsweise den Schwerpunkt eines Körpers zwischen Erde und Mond in der Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Himmelskörper in dem Punkte befindlich, wo ein Massentheilchen von Erde und Mond gleich stark angezogen wird, dann würde diesem Körper weder ein gegen die Erde noch ein gegen den Mond gerichtetes Gewicht zukommen. Den Abstand dieses Punktes vom Erdmittelpunkte findet man, wenn man die Entfernung der Mittelpunkte beider Himmelskörper mit dem Bruche $\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$ multiplicirt, wobei $n = \frac{\text{Masse der Erde}}{\text{Masse des Mondes}}$. Für die fast 9mal kleinere Entfernung dieses Punktes vom Mondmittelpunkte findet man dann eine Kilometerzahl, die zwischen 38000 und 39000 liegt. Hier ist das besagte Massenverhältniß $n = 79{,}667$ (nach Hansen) und die (mittlere) Entfernung des Mondes von der Erde $= 384415$ km angenommen.

Ein anderes Beispiel der Veränderlichkeit des Körpergewichtes haben wir schon an der durch die Erdrotation (Fliehkraft und Abplattung) verursachten Abhängigkeit der Acceleration der Schwere von der geographischen Breite (§. 15) kennen gelernt. Aus den später angeführten Zahlen läßt sich leicht berechnen, daß das Verhältniß $\frac{\text{Schwerkraft}}{\text{Fliehkraft}}$ unter dem Aequator annähernd $= 289 = 17^2$ ist, woraus hervorgeht, daß bei 17mal schnellerer Erdrotation ein Körper unter dem Aequator als gewichtslos erscheinen müßte, da in diesem Falle die Fliehkraft der Schwerkraft gleich wäre.

[3]) Vergl. Meyer's Conservations-Lexicon.

Fallen auch bei chemisch ungleichartigen Körpern stattfindet, hat Newton durch Pendelversuche nachgewiesen [1]).

Auch über das Verhältniß der Begriffe „Schwere" und „Gewicht" mögen einige Bemerkungen hier Platz finden.

Im engeren und ursprünglichen Sinne des Wortes bezeichnet „Schwere" die Eigenschaft eines jeden Körpers, daß er und jedes seiner Theilchen das Bestreben hat, zur Erde zu fallen, angetrieben durch eine der Trägheit (Masse) proportionale Kraft, die man Schwerkraft nennt. Die im Schwerpunkte des Körpers angreifende Resultirende der parallelen Schwerkräfte aller Körpertheilchen nennt man [2]) das „Gewicht" des Körpers. Dabei gilt (§. 15) als internationale Einheit das Gewicht einer Volumseinheit Wassers größter Dichte bei der Normalbeschleunigung der Schwere.

Durch Newton's Entdeckung der allgemeinen Schwere [3]) ist der Begriff

---

Trägheit der Körper vergleichen kann. Dabei stellt sich heraus, daß die Trägheitswerthe der Körper sich wie deren Gewichte und somit auch wie deren Massen verhalten, wie es auch sein muß, wenn man die Materie (mit Andreas v. Ettingshausen) als „das Träge im Raume" betrachtet. Nimmt man die Trägheit einer Volumseinheit Wassers größter Dichte als Einheit der Trägheitswerthe an, so werden Trägheit, Gewicht und Masse eines Körpers durch dieselbe Zahl ausgedrückt, wobei hinsichtlich des Gewichtes die Normal-Acceleration der Schwere (§. 15) vorausgesetzt wird.

[1]) Nachdem Galilei im Dome zu Pisa beobachtet hatte, daß leichte und schwere an gleichlangen Ketten hängende Kronleuchter gleich schnell schwingen, schloß er daraus, daß leichte und schwere Körper auch gleich schnell fallen müssen, was seine am schiefen Thurme zu Pisa angestellten Fallversuche auch bestätigt haben. Hierher gehören auch seine später (von 1592 an) in Padua ausgeführten feineren Pendelbeobachtungen und Fallversuche auf schiefer Ebene.

Die Unabhängigkeit der Fallbeschleunigung von der chemischen Beschaffenheit der Körper hat Newton durch Versuche mit gleichlangen Pendeln aus verschiedenen Materialien, die bei gehöriger Berücksichtigung des Luftwiderstandes gleiche Schwingungsdauer zeigen, nachgewiesen. Hierzu eignen sich gleich lange Fadenpendel mit gleichschweren Pendelkugeln, die verschiedenartige Materialien enthalten. Uebrigens wäre noch zu bemerken, daß auch schon bei den Fallversuchen von Galilei verschiedenartige Materialien verwendet wurden. Näheres hierüber findet man außer in den [illegible] Werken auch in Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung; Rosenberger, Geschichte der Physik, Wiedemann, Geschichte der inductiven Wissenschaften, [illegible]

[illegible] Anfangsgründe der Physik.

[illegible] Bewegung der Mondbewegung mit [illegible] daß die Weltkörper sich so bewegen, [illegible] Massen direct und dem [illegible] Anziehung wirksam [illegible] alle Körper unseres [illegible] Dabei wollen [illegible] Bemerkungen [illegible] Die nunmehrige Ausgabe Faraday) schon

der Schwere wesentlich erweitert worden. Die daraus sich ergebenden Folgerungen mußten, wie E. Mach[1]) treffend hervorgehoben hat, zuerst zu einer klaren Trennung der Begriffe Masse und Gewicht führen, da man ja jetzt einsehen mußte, daß demselben Körper (also derselben Masse), je nach seiner Lage im Weltraume, sehr verschiedene Beschleunigungen zu Theil werden, also auch sehr verschiedene Gewichte zukommen können.

Während also die Trägheit (und somit die Masse) eines Körpers unter allen Verhältnissen ungeändert bleibt, kann die Resultirende aller auf ihn wirkenden Gravitationskräfte, also sein „Gewicht" im weitesten Sinne des Wortes, sehr verschiedene Werthe annehmen und auch verschwindend klein werden[2]).

Aeltere Maßsysteme. Dem Bestreben nach der Herstellung eines ein- 54
heitlichen Maßsystemes begegnen wir schon in sehr früher Zeit. Bei den Chaldäern, die Tag und Nacht in je 12 Stunden theilten, diente als Grundlage für das Gewichtssystem unter dem Namen „Talent" das Gewicht einer binnen einer bestimmten Zeit aus einer Normal-Wasseruhr ausgeflossenen Wassermenge und die Kante des das Volumen dieser Wassermenge darstellenden Würfels als Längeneinheit. Aus dieser gingen die alte heilige Elle, die Elle des Nilmessers, als größeres und verschiedene Fuße als kleinere Maße hervor. Das Talent war auch die Grundlage des Münzwesens[3]). Wenn man annehmen könnte, daß das chaldäische Talent nicht viel von dem sehr gebräuch-

---

[1]) Die Mechanik in ihrer Entwickelung; 4. Auflage (1901), S. 200.

[2]) Man denke sich beispielsweise den Schwerpunkt eines Körpers zwischen Erde und Mond in der Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Himmelskörper in dem Punkte befindlich, wo ein Massentheilchen von Erde und Mond gleich stark angezogen wird, dann würde diesem Körper weder ein gegen die Erde noch ein gegen den Mond gerichtetes Gewicht zukommen. Den Abstand dieses Punktes vom Erdmittelpunkte findet man, wenn man die Entfernung der Mittelpunkte beider Himmelskörper mit dem Bruche $\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$ multiplicirt, wobei $n = \frac{\text{Masse der Erde}}{\text{Masse des Mondes}}$. Für die fast 9mal kleinere Entfernung dieses Punktes vom Mondmittelpunkte findet man dann eine Kilometerzahl, die zwischen 38000 und 39000 liegt. Hier ist das besagte Massenverhältniß $n = 79{,}667$ (nach Hansen) und die (mittlere) Entfernung des Mondes von der Erde $= 384415$ km angenommen.

Ein anderes Beispiel der Veränderlichkeit des Körpergewichtes haben wir schon an der durch die Erdrotation (Fliehkraft und Abplattung) verursachten Abhängigkeit der Acceleration der Schwere von der geographischen Breite (§. 15) kennen gelernt. Aus den später angeführten Zahlen läßt sich leicht berechnen, daß das Verhältniß $\frac{\text{Schwerkraft}}{\text{Fliehkraft}}$ unter dem Aequator annähernd $= 289 = 17^2$ ist, woraus hervorgeht, daß bei 17mal schnellerer Erdrotation ein Körper unter dem Aequator als gewichtslos erscheinen müßte, da in diesem Falle die Fliehkraft der Schwerkraft gleich wäre.

[3]) Vergl. Meyer's Conservations-Lexicon.

lichen attischen Talent (26,2 Kilo) verschieden war, so würde sich für die b
sagte Würfelseite eine Länge von beiläufig 30 Centimetern ergeben, a
ungefähr ein Fuß.

55 **Secundenpendel.** Ein verhältnißmäßig leicht mit großer Genauigk
herzustellendes Naturmaß wäre die Länge des einfachen Secundenpendels. I
der That hat Huyghens[1]) den dritten Theil der Länge (440,5 pariser Linie
des einfachen Secundenpendels in Paris (also eine Länge von etwas weni
als $^1/_3$ Meter) unter dem Namen „Stundenfuß" (pes horarius) als Länge
einheit vorgeschlagen. Zu einem Grundmaße (§. 3) ist jedoch die Länge d
Secundenpendels nicht geeignet, weil sie nicht nur von der Lage des Beo
achtungsortes, sondern auch von der Zeiteinheit abhängt.

Bezeichnet man mit λ die reducirte Länge des Secundenpendels und mit
(auf dieselbe Längeneinheit bezogen) die Beschleunigung der Schwere am Beo
achtungsorte, so besteht bekanntlich die Gleichung[2]):

$$g = \pi^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15$$

woraus hervorgeht, daß jede Formel, in der die Schwerebeschleunigung a
Function der geographischen Breite dargestellt ist, auch dazu dienen kann, d
Abhängigkeit der reducirten Länge von der geographischen Breite darzustelle
indem man z. B. allgemein aus

$$g_\varphi = g_0 \, (1 + a \sin^2 \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15$$

die Gleichung

$$\lambda_\varphi = \lambda_0 \, (1 + a \sin^2 \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15$$

erhält, nachdem man vermöge 157 $\frac{g_\varphi}{\pi^2} = \lambda_\varphi$ und $\frac{g_0}{\pi^2} = \lambda_0$ gesetzt hat. D
bei bedeuten g_0 und λ_0 die Schwerebeschleunigung und reducirte Länge d
Secundenpendels für das Meeresniveau unter dem Aequator und g_φ und λ_φ d
genannten Größen im Meeresniveau der geographischen Breite φ.

Die Gleichungen 158 und 159 werden oft auch so geschrieben

$$g_\varphi = g_0 + a g_0 \sin^2 \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16$$

$$\lambda_\varphi = \lambda_0 + a \lambda_0 \sin^2 \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16$$

---

[1]) Huyghens, Horologium oscillatorium, Paris 1673. Dieses berühm
Buch erschien also in demselben Jahre, in dem J. Richer von seiner im Auftr
der Pariser Academie unternommenen astronomischen Reise von Cayenne nach Pa
zurückgekehrt war, auf welcher Reise er eine Aenderung der Länge des Secund
pendels mit der geographischen Breite zuerst beobachtet hat. Dem hier citirten Bu
von Huyghens ist eine unter ähnlichem Titel 1658 erschienene Schrift vora
gegangen, die von seiner (1657 patentirten) Erfindung der Pendeluhren hand
Das Galilei'sche Pendel mit Zählwerk war ohne Gewicht- oder Federantr
also keine Uhr im gewöhnlichen Sinne. — Siehe Poggendorff, Geschichte
Physik, S. 619 und 599.

[2]) Siehe meinen Grundriß der mechanischen Physik, S. 66.

Die Dimension (Verwandlungszahl) einer Masse findet Sahulka durch Gleichsetzung des Dimensions-Ausdruckes $\frac{mm'}{l^2}$ für die Wechselwirkung der beiden Massen m und m' mit dem Dimensions-Ausdrucke $\frac{m'l}{t^2}$, der die Wirkung der Masse m, wenn diese als ruhend angenommen wird, auf die als beweglich angenommene Masse m' darstellt, und zwar ausgedrückt durch Masse und Beschleunigung. Es folgt dann aus $\frac{mm'}{l^2} = \frac{m'l}{t^2}$:

$$(m) = \frac{l^3}{t^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 164)$$

Bei der definirten astronomischen Masseneinheit ist die Gravitationsconstante gleich Eins.

Zur Erläuterung mag noch ein Beispiel dienen. Es sei M die Masse der Erde und m die Masse des Mondes in astronomischen Einheiten und r bedeute den Abstand der Mittelpunkte beider Himmelskörper in Kilometern. Dann ist die in astronomischen Krafteinheiten ausgedrückte Kraft p, mit der die beiden Himmelskörper einander anziehen, gegeben durch die Gleichung $p = \frac{Mm}{r^2}$ und folglich die in Kilometern ausgedrückte Beschleunigung γ, mit der der Mond gegen die Erde gravitirt, durch die Gleichung $\gamma = \frac{p}{m} = \frac{M}{r^2} = \frac{400\,000}{384\,415^2}$, also annähernd $= \frac{400\,000}{148 \times 10^9} = \frac{2702}{10^9}$ km $\doteq$ 2,7 mm $=$ 0,27 cm, übereinstimmend mit dem am Schlusse des §. 13 angeführten Ergebnisse der mit Benutzung der internationalen Einheiten durchgeführten Berechnung. (Siehe II. Theil, §. 58.)

Wollte man das Meter, also eine 10^3mal kleinere Länge, als Längeneinheit wählen, so hätte man nach Formel 164, da die Secunde als Zeiteinheit beibehalten bleibt, $M = 400\,000 \times 10^9$ zu setzen, und da nun andererseits $r = 384\,415 \times 10^3$, so erhält man schließlich für die Beschleunigung in Metern $\frac{2702}{10^6}$ m $\doteq$ 2,7 mm $=$ 0,27 cm wie vorhin.

Bleibt man beim Kilometer als Längeneinheit (immer mit Beibehaltung der Secunde als Zeiteinheit), so gibt das Product $5000 \times \frac{2702}{10^9} \doteq 0{,}0135$ einen angenäherten Werth für die in astronomischen Krafteinheiten ausgedrückte Anziehung zwischen Erde und Mond, für die ich (am Schlusse des §. 14) die fünfzehn millionenmal größere Zahl von 200 000 kilometrischen Krafteinheiten

J. Sahulka[1]) hat gezeigt, daß die absoluten Maße sämmtlicher physicalischen Größen auf zwei von einander unabhängige Grundmaße zurückführbar sind, wenn man nämlich bei der Aufstellung der Einheit der Massen analog verfährt, wie bei der Aufstellung der Einheiten für magnetische und für electrische Quantitäten, d. h. wenn man als Masseneinheit jene Masse ansieht, die auf eine gleich große, im Abstande der Längeneinheit befindliche, mit einer Kraft gleich der Krafteinheit einwirkt, wobei als Krafteinheit wieder jene Kraft gilt, die der Masseneinheit eine Beschleunigung vom Betrage der Längeneinheit in der Zeiteinheit beibringt. Nehmen wir zugleich das Centimeter als Längeneinheit und die Secunde als Zeiteinheit an, so kann die von J. Sahulka besprochene Masseneinheit kurz als jene Masse bezeichnet werden, die einer gleich großen, im Abstande eines Centimeters befindlichen, in einer Secunde die Beschleunigung vom Betrage eines Centimeters ertheilt. Dabei denken wir uns beide Massen in Punkten concentrirt, erstere als ruhend, letztere als beweglich angenommen.

Um zunächst von der Größe dieser astronomischen Masseneinheit eine Vorstellung zu bekommen, erwägen wir, daß, wenn diese Masseneinheit x Gramme beträgt, deren Wirkung auf eine gleich große, im Abstande eines Centimeters befindliche, nach den Lehren des §. 17 in Dynen ausgedrückt $= 66 \times 10^{-9} \times \frac{x^2}{1}$ sein muß. Diese Wirkung soll aber der Masse x die Beschleunigung von einem Centimeter ertheilen, also in Dynen ausgedrückt, gleich x sein. Man kommt also zur Gleichung $66 \times 10^{-9} . x^2 = x$, also $x = \frac{10^9}{66}$, d. i. rund 15 Millionen[2]) Gramm oder 15 Tonnen, wenn 1 cm als Längeneinheit gilt.

Hätte man hingegen z. B. 1 km als Längeneinheit angenommen, so wäre die astronomische Masseneinheit in runder Zahl 15 Millionen kilometrischen Masseneinheiten (§. 12) gleichzusetzen und also z. B. die 6064×10^9 kilometrische Masseneinheiten betragende Masse der Erde $= 6064 \times 10^9 : (15 \times 10^6)$, also in runder Zahl $= 400\,000$ astronomischen Einheiten zu setzen, wie aus dem im §. 17 (zwischen Formel 38 und 39) Gesagten hervorgeht, wenn man erwägt, daß die astronomische Masseneinheit mit der Masse der Volumseinheit Wasser verglichen, wie die vorstehende Ableitung zeigt, immer durch den reciproken Werth der Gravitationsconstante ausgedrückt wird. Unter derselben Voraussetzung wäre dann z. B. die Masse des Mondes in runder Zahl $= 5000$ astronomischen Einheiten.

---

[1]) Siehe Dr. J. Sahulka, Zurückführung der absoluten Maße der physicalischen Größen auf die zwei Grundbegriffe von Länge und Zeit. Electrotechnische Zeitschrift, Berlin 1890, S. 459. Uebrigens ist in dieser Abhandlung die Gravitationsconstante $= 643 \times 10^{-10}$ angenommen.

[2]) Genauer $15{,}151\,515 \ldots \times 10^6$.

Die Dimension (Verwandlungszahl) einer Masse findet Sahulka durch Gleichsetzung des Dimensions-Ausdruckes $\frac{m\,m'}{l^2}$ für die Wechselwirkung der beiden Massen m und m' mit dem Dimensions-Ausdrucke $\frac{m'\,l}{t^2}$, der die Wirkung der Masse m, wenn diese als ruhend angenommen wird, auf die als beweglich angenommene Masse m' darstellt, und zwar ausgedrückt durch Masse und Beschleunigung. Es folgt dann aus $\frac{m\,m'}{l^2} = \frac{m'\,l}{t^2}$:

$$(m) = \frac{l^3}{t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 164)$$

Bei der definirten astronomischen Masseneinheit ist die Gravitationsconstante gleich Eins.

Zur Erläuterung mag noch ein Beispiel dienen. Es sei M die Masse der Erde und m die Masse des Mondes in astronomischen Einheiten und r bedeute den Abstand der Mittelpunkte beider Himmelskörper in Kilometern. Dann ist die in astronomischen Krafteinheiten ausgedrückte Kraft p, mit der die beiden Himmelskörper einander anziehen, gegeben durch die Gleichung $p = \frac{M\,m}{r^2}$ und folglich die in Kilometern ausgedrückte Beschleunigung γ, mit der der Mond gegen die Erde gravitirt, durch die Gleichung $\gamma = \frac{p}{m} = \frac{M}{r^2} = \frac{400\,000}{384\,415^2}$, also annähernd $= \frac{400\,000}{148 \times 10^9} = \frac{2702}{10^9}$ km $\doteq$ 2,7 mm $=$ 0,27 cm, übereinstimmend mit dem am Schlusse des §. 13 angeführten Ergebnisse der mit Benutzung der internationalen Einheiten durchgeführten Berechnung. (Siehe II. Theil, §. 58.)

Wollte man das Meter, also eine 10^3 mal kleinere Länge, als Längeneinheit wählen, so hätte man nach Formel 164, da die Secunde als Zeiteinheit beibehalten bleibt, $M = 400\,000 \times 10^9$ zu setzen, und da nun andererseits $r = 384\,415 \times 10^3$, so erhält man schließlich für die Beschleunigung in Metern $\frac{2702}{10^6}$ m $\doteq$ 2,7 mm $=$ 0,27 cm wie vorhin.

Bleibt man beim Kilometer als Längeneinheit (immer mit Beibehaltung der Secunde als Zeiteinheit), so gibt das Product $5000 \times \frac{2702}{10^9} \doteq 0{,}0135$ einen angenäherten Werth für die in astronomischen Krafteinheiten ausgedrückte Anziehung zwischen Erde und Mond, für die ich (am Schlusse des §. 14) die fünfzehn millionenmal größere Zahl von 200 000 kilometrischen Krafteinheiten

angegeben habe. In der That ist einleuchtend, daß eine astronomische Krafteinheit $= \frac{10^9}{66}$ kilometrischen Krafteinheiten sein muß, da dieses Verhältniß zwischen der astronomischen und kilometrischen Masseneinheit besteht, wenn in beiden Fällen das Kilometer als Längeneinheit und die Secunde als Zeiteinheit vorausgesetzt wird.

Uebrigens hätte die soeben berechnete Anziehung auch unmittelbar nach der Formel $\frac{\text{Product der Massen}}{\text{Quadrat der Entfernung}}$ mit Benutzung der bereits angegebenen Zahlen gefunden werden können. Die Anziehung zwischen Sonne und Erde fände man auf diesem Wege wie folgt. Die im Vergleiche mit der Erde über 300000 mal größere Sonnenmasse kann man rund $= 13 \times 10^{10}$ astronomischen Masseneinheiten[1]) und die mittlere Entfernung beider Himmelskörper $= 148{,}65 \times 10^6$ km annehmen, also, da die Erdmasse $= 4 \times 10^5$, die Anziehung beider Himmelskörper $= \frac{13 \times 10^{10} \times 4 \times 10^5}{148{,}65^2 \times 10^{12}} \doteq \frac{52 \times 10^{15}}{22{,}1 \times 10^{15}}$ $= 2{,}35$ astronomischen Krafteinheiten, eine Anziehung, die 174 mal größer ist, als die zwischen Mond und Erde. In kilometrischen Einheiten ausgedrückt, beträgt diese Anziehung (§. 14) über 35 Millionen, nämlich wieder eine rund 15 millionenmal $\left(\frac{10^9}{66}\right)$ größere Zahl.

57 **Urmaße (Prototype). Liter.** Die ersten Urmaße (auch Prototype genannt) für Meter und Kilogramm wurden zu Ende des vorigen Jahrhunderts (1800) aus Platin hergestellt und im französischen Staatsarchiv zu Paris aufbewahrt.

In Folge der Erfahrung, daß die Beschaffenheit dieses Urmaßes die Herstellung von Copien nicht mit jener Genauigkeit sicher gestattete, die für den wissenschaftlichen Gebrauch und für grundlegende Arbeiten des Maß- und Gewichtswesens erforderlich schien, wurde die Herstellung eines neuen Meter-Urmaßes mit den seither wesentlich verbesserten Hilfsmitteln der Wissenschaft angestrebt.

Die französische Regierung förderte diesen Zweck und die in Paris (1869 bis 1875) abgehaltenen internationalen Meterconferenzen führten schließlich zu der internationalen Meterconvention vom 20. Mai 1875, der wohl die meisten Culturstaaten beigetreten sind.

Im Jahre 1878 wurden die diesbezüglichen Arbeiten im Bureau inter-

[1]) In kilometrischen Einheiten setzen wir die Masse der Erde $= 6064 \times 10^3$, die der Sonne $= 322800 \times 6064 \times 10^9 \doteq 1{,}957 \times 10^{18}$ und die Masse des Mondes (beinahe 80 mal kleiner als die der Erde) $= 76 \times 10^9$.

national des Poids et Mesures (auf der Höhe von St. Cloud bei Paris) aufgenommen und im Zeitraume bis 1889 die neuen Prototype des Meters und des Kilogrammes möglichst übereinstimmend mit den Prototypen des Archives, aus einer dazu besonders geeigneten Platin-Iridium-Legirung angefertigt. Eine gewisse Anzahl von ganz zuverlässigen Copien, von den Vertragsstaaten bestellt, wurden an diese abgeliefert.

Dabei ist hinsichtlich des „Liter“ [1]) noch Folgendes zu bemerken.

Das im Pariser Staatsarchive aufbewahrte, von De Borda durch Wägung hergestellte Platin-Kilogramm sollte die Masse eines Cubikdecimeters chemisch reinen Wassers im Zustande seiner größten Dichte darstellen und bildet seither die eigentliche Masseneinheit, auf die alle Massenvergleichungen schließlich bezogen werden.

Spätere genauere Messungen haben jedoch für ein Cubikdecimeter Wasser ein von diesem Kilogramm-Prototype etwas verschiedenes Gewicht ergeben. Insofern ist es also nicht mehr in aller Schärfe zutreffend, die Masse eines Kilogrammgewichtstückes der Masse eines Cubikdecimeters reinen Wassers größter Dichte gleichzusetzen. Da es ferner in der Praxis üblich geworden ist, den ursprünglich dem Cubikdecimeter beigelegten Namen Liter dem Volumen einer Wassermenge, die ein Kilogramm wiegt, beizulegen, weil es bequem ist, die Aichung von Hohlmaßen durch Abwägung der Wasserfüllung vorzunehmen, so müssen wir auch zwischen dem Cubikdecimeter und dem in der aichamtlichen Praxis sogenannten Liter unterscheiden. Das Verhältniß zwischen beiden soll im internationalen Maß- und Gewichtsbureau ermittelt werden [2]).

Gravitation. Die im §. 13 angegebene Beschleunigung des Mondes 58
gegen die Erde ergibt sich nach dem Gravitationsgesetze $= G\frac{R^2}{r^2}$, wobei $G = 9{,}823$ m die Fallbeschleunigung auf der als kugelförmig und nicht rotirend vorausgesetzten Erde, $R = 6\,370\,284$ m der Erdhalbmesser (d. i. Halbmesser einer Kugel vom Rauminhalte des Erdkörpers) und $r = 384\,415\,500$ m, die mittlere Entfernung des Mondmittelpunktes vom Erdmittelpunkte ist. Man erhält dann $G\frac{R^2}{r^2} = 0{,}002\,697$ m $\doteq 0{,}27$ cm.

Bei der Berechnung der angegebenen Beschleunigungen der Erde gegen die Sonne bin ich von der Berechnung der Fliehkraft-Beschleunigung $\frac{v^2}{r}$ aus-

[1]) Der Name kommt wohl vom griechischen λίτρα, obgleich dieses Wort nicht ein Volumen, sondern ein Pfundgewicht (12 Unzen) bedeutet.

[2]) Vergl. Pfaundler's Lehrbuch der Physik, 9. Aufl., 1. Band, S. 43 bis 45 und v. Thaa, Supplementheft zu dem Werke: Das Maß- und Gewichtswesen und der Aichdienst in Oesterreich, S. 394 bis 397.

gegangen, wobei v die Tangentialgeschwindigkeit und r den Krümmungshalbmesser an den betrachteten Stellen der Erdbahn vorstellt. Diese beiden Kräfte sind nämlich in den Endpunkten der großen Axe der Erdbahn-Ellipse[1]) einander gleich und entgegengesetzt. In diesen Punkten ist $r = \frac{b^2}{a}$, wobei b und a die kleine und die große Halbaxe der Ellipse bedeuten. Im Perihel ist $v = 30{,}09$ km[2]); setzt man ferner $b = 148{,}629 \times 10^6$ km und $a = 148{,}650 \times 10^6$ km[3]), so erhält man $r = 148{,}610 \times 10^6$ km und hieraus die Beschleunigung der Fliehkraft, folglich auch der Centralkraft $= 0{,}000\,006\,092$ km $= 6{,}1$ mm. Für die Centralkraft im Aphel erhält man $6{,}092 \cdot \frac{146{,}2^2}{151{,}1^2} = 5{,}7$ mm, was sich auch ergibt, wenn man in den Ausdruck $\frac{v^2}{r}$ die nach einem bekannten Folgesatze aus dem zweiten Keppler'schen[4]) Gesetze berechnete Geschwindigkeit im Aphel

$$v = 30{,}09\,\frac{146{,}2}{151{,}1} = 29{,}114 \text{ km}$$

einsetzt.

69 **Schwerkraft.** Um die Abhängigkeit der Schwerebeschleunigung von der Meereshöhe an einem Beispiele zu zeigen, bemerken wir, daß diese Beschleunigung auf dem Gipfel des Montblanc 9,794 72 m beträgt und daß also daselbst eine Masse von $\frac{9{,}806\,652}{9{,}79472} = 1{,}001\,22$ Kilogramm-Gewichtsstücken erforderlich wäre, um dieselbe Zugkraft auszuüben, wie im Meeresniveau der mittleren Breite 1 Kilogramm. Hier beträgt also der Gewichtsunterschied einer Kilogrammmasse mehr als 1,2 Gramm.

Nachstehend folgen die Werthe der Schwerebeschleunigung g in Metern für einige Orte von der geographischen Breite φ und der Meereshöhe H[5]).

---

[1]) Diese Punkte nennt man bekanntlich Perihel oder Sonnennähe oder Aphel oder Sonnenferne.

[2]) Littrow, Wunder des Himmels S. 88.

[3]) Im astronomischen Kalender der Wiener Sternwarte (1901) sind als größte und kleinste Entfernung der Erde von der Sonne 151,1 $\times 10^6$ km und 146,2 $\times 10^6$ km angegeben, woraus sich die Werte der [illegible] berechnen lassen.

[4]) Aus dem Gesetze der Fläche [illegible] folgt, daß für die Tangentialgeschwindigkeiten verkehrt verhältnismäßig [illegible] die von dem Centralkörper auf die Tangenten gefällten Perpendikel [illegible] Dieses Gesetz hat Kepler begründet Poggendorff [illegible] Beiblatt 9 [illegible] 1885.

[5]) Aus den [illegible] des Preußischen geodätischen Institutes' [illegible] Rede Helmerts [illegible]

Berlin ($\varphi = 52^0\,30'\,17''$; $H = 37$ m)
$g = 9{,}813\,03$

Budapeſt ($\varphi = 47^0\,29'\,43''$; $H = 122$ m)
$g = 9{,}808\,60$

Chriſtiania ($\varphi = 59^0\,54'\,44''$; $H = 28$ m)
$g = 9{,}819\,50$

Greenwich ($\varphi = 51^0\,28'\,38''$; $H = 48$ m)
$g = 9{,}812\,00$

Hamburg ($\varphi = 53^0\,32'\,49''$; $H = 24$ m)
$g = 9{,}814\,00$

Innsbruck ($\varphi = 47^0\,16'\,7''$; $H = 584$ m)
$g = 9{,}805\,43$

London (Standard Office, $\varphi = 51^0\,30'$; $H = 5{,}5$ m)
$g = 9{,}812\,355$ [1])

München (Bogenhauſen, $\varphi = 48^0\,8'\,46''$; $H = 529$ m)
$g = 9{,}807\,35$

Paris (Pavillon de Breteuil, $\varphi = 48^0\,50'$; $H = 67$ m)
$g = 9{,}809\,91$ [2])

Paris (Sternwarte, $\varphi = 48^0\,50'\,11''$; $H = 73$ m)
$g = 9{,}809\,63$

Potsdam (geodätiſches Inſtitut, $\varphi = 52^0\,22'\,51''$; $H = 88$ m)
$g = 9{,}812\,93$

Pulkowa ($\varphi = 59^0\,46'\,19''$; $H = 71$ m)
$g = 9{,}819\,07$

Riva ($\varphi = 45^0\,53'\,3''$; $H = 70$ m)
$g = 9{,}806\,61$

Rom ($\varphi = 41^0\,53'\,36''$; $H = 59$ m)
$g = 9{,}803\,63$

Sarajevo ($\varphi = 43^0\,48'$; $H = 511$ m)
$g = 9{,}803\,98$

Spitzbergen ($\varphi = 78^0\,28'\,27''$; $H = 52$ m)
$g = 9{,}828\,78$

---

[1]) Berechnet aus der in Pfaundler's Lehrbuch der Phyſik, 9. Aufl., 1. Band, S. 113 enthaltenen Angabe aus den Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures.

[2]) Siehe ebendaſelbſt und in dem im §. 57 bereits citirten Werke über das Maß- und Gewichtsweſen u. ſ. w. in Oeſterreich.

Venedig ($\varphi = 45^0\,26'\,38''$; $H = 4$ m)
$g = 9{,}806\,65$

Wien (milit.-geogr. Institut, $\varphi = 48^0\,12'\,40''$; $H = 183$ m)
$g = 9{,}808\,76$

Wien (Universitäts-Sternwarte, $\varphi = 48^0\,13'\,57''$; $H = 236$ m)
$g = 9{,}808\,66$.

Hinsichtlich der Begründung der im §. 15 bei der Formel 33 erwähnten Correctionen muß auf die daselbst citirte Abhandlung verwiesen werden. Nebenbei sei bemerkt, daß die Helmert'sche Formel in den neuestens erschienenen „Rapports" über den Physiker-Congreß in Paris 1900 ohne Correctionsglied als eine sehr gebräuchliche Formel angeführt wird. Immerhin wird diese Weglassung belanglos sein, wenn es sich nicht um möglichst große Genauigkeit handelt, weßhalb denn auch im §. 15 die Helmert'sche Formel 33 zunächst in ihrer ursprünglichen Gestalt erscheint, gleichwohl mit Hinzufügung einer die Correctionsglieder ($+\,0{,}000\,45$ und $+\,0{,}000\,35$) erwähnenden Bemerkung. Wir wollen die erstere dieser Correctionen beibehalten und können dann mit Rücksicht auf die Formeln 158 und 160 auch schreiben

$$g_\varphi = 9{,}780\,45 + 0{,}051\,9\ sin^2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 165)$$

Da $sin^2\varphi = \dfrac{1 - cos\,2\varphi}{2}$, besteht auch die Gleichung

$$g_\varphi = 9{,}806\,4\underline{2} - 0{,}02\underline{6}\ cos\,2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 166)$$

wobei das erste Glied (9,806 42) offenbar die Schwerebeschleunigung im Meeresniveau der mittleren Breite ($\varphi = \pm\,45^0$) bedeutet, entsprechend der allgemeinen Formel

$$g_\varphi = g_{45^0} - 0{,}026\ cos\,2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 167)$$

Zugleich ist ersichtlich, daß das erste Glied des Werthes von g_φ in Formel 166 mit der Normal-Acceleration der Schwere (9,806 652, §. 14) weniger gut übereinstimmen würde, wenn man die besprochene Correction in der Helmert'schen Formel nicht angebracht hätte.

Die Formeln 165 und 166 lassen ferner sofort erkennen, daß sich für die Pole der Erde ($\varphi = \pm\,90^0$) eine um 51,9 Millimeter größere Schwerebeschleunigung ergibt als für den Aequator. Von dieser Differenz (fast 52 mm) kommen aber, wie sich aus dem Aequatorialradius und der Rotationsgeschwindigkeit der Erde leicht berechnen läßt, nur 34 mm auf Rechnung der Fliehkraft, die übrigen 18 mm müssen dem Einflusse der Abplattung der Erde zugeschrieben werden [1]). Zugleich ergibt sich hieraus, daß die Schwerebeschleunigung

[1]) Hier ist der Aequatorialradius = 6 378 000 m und die Umdrehungszeit der Erde = 86 164,09 Secunden mittlerer Sonnenzeit angenommen. Die Fliehkraft unter dem Aequator ergiebt sich hieraus = 0,033 9 m.

unter dem Aequator bei ruhender Erde = 9780 + 34 = 9814 mm nahezu 289 mal größer sein würde als die Fliehkraftbeschleunigung 34 mm, wovon schon im §. 53 (letzte Anmerkung) die Rede war.

Jolly's Waagen. Das Bereich der Federwaagen ist, wenn auch dem 60
der Hebelwaagen nicht gleichkommend, doch immerhin sehr groß, von der Jolly'schen Federwaage, die schon die Belastung mit einem Milligramm anzeigt, bis zu den Dynamometern, die zur Messung der bei der Bewegung schwerer Lasten aufgewendeten Zugkräfte dienen. Mit einer Jolly'schen Federwaage ließe sich die Abhängigkeit der Schwere von der geographischen Breite recht wohl nachweisen, so wie auch die Abhängigkeit von der Höhe des Beobachtungsortes[1]).

Gravitationsconstante. Für die Schwerebeschleunigung auf der als 61
kugelförmig und nicht rotirend vorausgesetzten Erde wurde der Werth 982,3 cm angenommen, eine Zahl, die dem Mittelwerthe der Beschleunigungen für Pol und Aequator auf der als nicht rotirend angenommenen abgeplatteten Erde sehr nahe kommt. Man erhält nämlich für diese Beschleunigungen, da die Fliehkraftbeschleunigung unter dem Aequator = 3,39 cm ist, mit Hilfe der Formel 165 die Werthe 978,045 + 5,19 = 983,235 und 978,045 + 3,39 = 981,435, deren Mittel 982,335 ist.

Der in die Formel 37 eingesetzte Radius $R = 637 \times 10^6$ cm ist in runder Zahl der Radius einer Kugel vom Rauminhalte des Erdkörpers. Nimmt man dessen mittlere Dichte[2]) = 5,6 an, so erhält man den in die Formel 37 eingesetzten Massenwerth $M = 6064 \times 10^{24}$ Gramm.

Die Berechnung der Gravitationsconstante aus den Centralbewegungen des Mondes und der Erde habe ich in folgender Weise durchgeführt.

Wenn zwei Himmelskörper von den Massen M und m beim Abstande r sich dergestalt anziehen, daß m gegen M die Beschleunigung γ erhält, so gilt

---

[1]) Auch mit einer (in Pfaundler's Lehrbuch der Physik, 9. Aufl., 1. Band, S. 110 beschriebenen) gleicharmigen Hebelwaage hat Jolly die Gewichtsdifferenz gleicher Massen in ungleichen Höhen nachgewiesen. Zu diesem Zwecke war die Waage nebst dem gewöhnlichen Schaalenpaare noch mit zwei um etwa 5 m tiefer hängenden Schaalen versehen. Näheres an citirter Stelle.

[2]) Die Dichte d im Erdinnern im Abstande r vom Mittelpunkte (r in Theilen des Erdhalbmessers ausgedrückt) ist nach R. v. Sterneck gegeben durch die Gleichung $d = 14{,}8\,(1 - 0{,}8176\,r)$; hingegen die Schwere γ (ausgedrückt in Theilen ihres Werthes an der Erdoberfläche) durch die Gleichung $\gamma = 2{,}5854\,r - 1{,}5854\,r^2$, so daß in einer Tiefe von etwa 1200 km der Maximalwerth ($\gamma = 1{,}05$) erreicht wäre, worauf die Schwere wieder abnehmend im Erdmittelpunkte = 0 werden muß. Als Maximalwerth der Dichte im Centrum der Erde wurde von anderer Seite der Werth 12,2 (anstatt 14,8) aus theoretischen Untersuchungen abgeleitet. (R. v. Sterneck, Ueber Schwerebestimmungen. Ein Vortrag. Wien 1889, S. 15.)

die Gleichung $m\gamma = k\frac{Mm}{r^2}$. Demnach ist die Gravitationsconstante k gegeben durch

$$k = \frac{\gamma r^2}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 168)$$

Setzt man nun die im §. 58 angegebenen Werthe (z. B. in kilometrischen Einheiten) ein, so erhält man für den Mond

$$k = \frac{27 \times 10^{-7} \times 384\,415^2}{6064 \times 10^9} = 65796 \times 10^{-12}.$$

In analoger Weise findet man für die Erde, mit Benutzung der für das Perihel geltenden Werthe von γ und r

$$k = \frac{6092 \times 10^{-9}\,(146{,}2 \times 10^6)^2}{322\,800 \times 6064 \times 10^9} = 66\,537 \times 10^{-12}$$

wobei die Sonnenmasse = 322 800 Erdmassen angenommen ist [1]).

62 **Arbeit. Antrieb.** In den meisten Fällen besteht die mit technischen Hilfsmitteln (Maschinen) geleistete Arbeit in der Ueberwindung von Reibungs- und Mittelwiderständen und in der Hebung von Lasten. Eine Kraft verrichtet aber auch Arbeit, indem sie lediglich einer bestimmten Masse eine gewisse Geschwindigkeit ertheilt, denn sie ertheilt ihr damit „lebendige Kraft", die bekanntlich (§. 21) einem bestimmten Arbeitswerthe äquivalent ist. Wird z. B. der Masse von m Grammen die Geschwindigkeit von v Centimetern ertheilt, so erlangt sie damit als „lebendige Kraft" einen Arbeitsvorrath von $\frac{mv^2}{2}$ Erg. Eben diese Arbeit hat die Kraft geleistet, die der Masse m die Geschwindigkeit v ertheilt hat. In diesem Falle war die Trägheit der Materie (von Newton „vis inertiae", d. i. Kraft der Trägheit genannt) der Widerstand, um den es sich handelte. Wir können ihn Trägheitswiderstand (i) nennen und

$$i = m\frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 169)$$

als den Betrag ansehen, mit dem er sich geltend macht. Es ist dies zugleich der Betrag der Kraft p, die erforderlich ist, um der Masse m während des Zeitelementes dt den Geschwindigkeitszuwachs dv zu ertheilen. Die Integration der Gleichung $m\,dv = p\,dt$ führt uns zur Erkenntniß, daß das Integral $\int_{t_1}^{t_2} p\,dt = mv_2 - mv_1$ die Aenderung der Bewegungsgröße (mv) innerhalb der Zeit $t_2 - t_1$ darstellt.

[1]) Astronomischer Kalender der Wiener Sternwarte 1901, S. 93.

Wir nennen (mit Belanger[1]) den Ausdruck $\int_{t_1}^{t_2} p\,dt$ den Antrieb der Kraft p während der Zeit $t_2 - t_1$ und den (dem Differentiale $m\,dv$ der Bewegungsgröße entsprechenden) Ausdruck $p\,dt$ den Elementarantrieb der Kraft p während des Zeitdifferentiales dt.

Calorie. Nach der ursprünglichen Definition nannte man eine Calorie 63
die Wärmemenge, die erforderlich ist, um 1 kg Wasser von 0° C. auf 1° C. zu erwärmen. Diese Regnault'sche Nullpunkts-Calorie ist aber unhaltbar geworden, seit man weiß, daß die specifische Wärme des Wassers bei 0° C. über $^1/_2$ Proc. größer ist, als bei Zimmertemperatur.

Da Wärme mechanischer Arbeit äquivalent ist, so bietet sich uns zunächst die Arbeitseinheit, z. B. das Joule, als Wärmeeinheit dar. Auf diese Einheit bezogen, wäre also die specifische Wärme des Wassers bei 15° C. gleich 4,189. Diese Einheit hätte, wie E. Warburg hervorhebt, den Vortheil, in einfacher Beziehung zu den electrischen Einheiten zu stehen. Da jedoch wegen der vorwiegenden Anwendung des Wassercalorimeters bei calorimetrischen Messungen die Wassercalorie kaum entbehrlich ist, hat das Electrical Standards Committee der British Association im Wesentlichen nach dem Vorschlage von E. H. Griffiths die Wärmeeinheit 4,2 Joule, der 10°-Wassercalorie nahezu entsprechend vorgeschlagen, und wir wollen diese Einheit, der das Comité den Namen einer Calorie beigelegt hat, nach dem ursprünglichen Vorschlage von Griffiths ein Rowland nennen.

Wir haben uns im §. 23 für die von Warburg vorgeschlagene 15°-Wassercalorie entschieden und verweisen im Uebrigen auf Warburg's im §. 23 bereits citirte Schrift, der wir auch in diesem Paragraphen gefolgt sind.

Zur Erläuterung der Formeln 52 bis 55 über das mechanische Wärme- und calorische Arbeits-Aequivalent im Zusammenhange mit den §§. 18 und 21 mögen noch einige Beispiele hier Platz finden.

1. Die bei der Verdichtung des Erdkörpers aus dem hypothetischen Urzustande in den gegenwärtigen Zustand vollbrachte Arbeit ist gegeben durch das „Potential der Erde auf sich selbst“[2] $= \frac{3}{5} k \frac{M^2}{R}$, wobei k die Gravitationsconstante, M die Masse und R den Halbmesser des Erdkörpers bedeuten. Man erhält also in kilometrischen Arbeitseinheiten $\frac{3}{5} \cdot \frac{66}{10^9} \cdot \frac{(6064 \,.\, 10^9)^2}{6370}$

[1]) Siehe Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung, 4. Aufl. (1901), S. 308.
[2]) Siehe Helmholtz, Populäre wissenschaftliche Vorträge, 2. Heft, S. 134 und meinen Grundriß der mechanischen Physik, Seite 339. — Die Erde wird hier als homogene Kugel von der Dichte 5,6 vorausgesetzt.

$\doteq 228{,}6 \times 10^{12}$. Die einer kilometrischen Arbeitseinheit äquivalente Wärmemenge beträgt nach den der Formel 54 beigefügten Erläuterungen 238,7 kilometrische Wassercalorien, folglich die Verdichtungswärme der Erde $228{,}6 \times 10^{12} \times 238{,}7 \doteq 54{,}6 \times 10^{15}$ solche Calorien. Durch die Verbrennung einer der Masse des Erdkörpers gleichen Steinkohlenmasse würden ungefähr $6064 \times 10^9 \times 6000 \doteq 36{,}4 \times 10^{15}$ kilometrische Calorien entwickelt werden. Es wäre also die Verbrennung einer ungefähr $\frac{54{,}6}{36{,}4} = 1\frac{1}{2}$ Erdmassen gleichen Steinkohlenmasse erforderlich, um eine der Verdichtungswärme des Erdkörpers gleichkommende Wärmemenge zu liefern.

2. Eine aus unendlicher Entfernung zur Erde fallende kilometrische Masseneinheit erlangt an der Erdoberfläche eine lebendige Kraft von $k\frac{M}{R} = \frac{66}{10^9} \cdot \frac{6064 \times 10^9}{6370} = 62{,}8$ kilometrischen Arbeitseinheiten [1]), äquivalent $62{,}8 \times 238{,}7 \doteq 14990$ kilometrischen Wassercalorien. Ebenso viele kg-Calorien, also rund 15 Tonnen-Calorien, entsprechen also der lebendigen Kraft eines zur Erde gefallenen Kilogrammes, also eine Wärmemenge, mit der man etwa $23\frac{1}{2}$ kg eiskaltes Wasser in 100 gradigen Dampf verwandeln könnte.

3. Die lebendige Kraft der mit der Geschwindigkeit von 30 km fortschreitenden Bewegung des Erdballes beträgt $\frac{6064 \times 10^9 \times 30^2}{2}$, also in runder Zahl 2729 Billionen kilometrische Arbeitseinheiten. Zur Erzeugung der dieser lebendigen Kraft äquivalenten Wärmemenge wäre die Verbrennung einer Steinkohlenmasse erforderlich, die $\frac{2729 \times 10^{12} \times 238{,}7}{6064 \times 10^9 \times 6000} = 17{,}9$ Erdmassen gleichkäme.

Die lebendige Kraft der rotirenden Bewegung der Erde ist ungefähr zehntausendmal kleiner.

Die lebendige Kraft der mit der Geschwindigkeit von 1 km fortschreitenden Bewegung des Mondes beträgt $\frac{76 \times 10^9 \times 1^2}{2} = 38 \cdot 10^9$, äquivalent $38 \times 10^9 \times 238{,}7 \doteq 9 \times 10^{12}$ kilometrischen Wassercalorien, zu deren Erzeugung nahezu 0,02 Mondmassen Steinkohle erforderlich wären.

64 **Arbeitsstärke.** Die Begriffe „Arbeit" und „Arbeitsstärke" = Arbeit in der Zeiteinheit werden so oft verwechselt, daß deren Unterscheidung nicht genug hervorgehoben werden kann. Gar oft hört man z. B. Pferdestärke oder

[1]) Siehe meinen Grundriß der mechanischen Physik, S. 298.

Kilowatt Arbeitseinheiten nennen, obgleich dies ebenso absurd ist, als wenn Jemand eine Stromeinheit eine Mengeneinheit nennen wollte.

Auch scheint mir die Bezeichnung „Effect" für Arbeitsstärke insofern nicht sehr glücklich gewählt zu sein, als das Wort eigentlich eine hervorgebrachte Wirkung ohne jede Beziehung auf die dazu erforderlich gewesene Zeit [1]) bedeutet.

Besser als mit den Worten „Arbeit" und „Effect" sind die Begriffe work und rate of working mit den Worten „Arbeit" und „Leistung" unterschieden. Auch mit dem Ausdrucke „Arbeitsstärke" ist mehr die Intensität der arbeitenden Kraft als die der Zeiteinheit entsprechende Verschiebung ihres Angriffspunktes betont. In der zweiten Auflage dieser Schrift hatte ich zur Bezeichnung einer auf Zeit bezogenen Arbeit den Ausdruck „Zeitarbeit" vorgeschlagen.

II. Abschnitt.

Freier Magnetismus. Tragkraft. In physicalischer Hinsicht muß 65
man sich gegenwärtig halten, daß es nicht möglich ist, nördlich oder südlich magnetische Quantitäten oder Körpertheilchen isolirt darzustellen, sondern, daß wir uns jedes Molecül eines Magneten mit gleichviel nördlichem und südlichem Magnetismus behaftet denken müssen, ohne daß eine Uebertragung dieses Magnetismus von Theilchen zu Theilchen möglich wäre [2]). Hingegen kann man sich, wie die Potentialtheorie lehrt [3]), allen Magnetismus aus dem Inneren des Körpers fortgenommen und dergestalt auf der Oberfläche desselben angeordnet

---

[1]) Wenn man z. B. eine bleierne Kugel mit einem Hammer platt schlägt und ein anderes Mal eine ebensolche bleierne Kugel im gleichen Maße mit einer hydraulischen Presse platt drückt, so ist, nach dem gewöhnlichen etymologisch begründeten Sprachgebrauche, der „Effect" in beiden Fällen derselbe, d. h. man hat in beiden Fällen dasselbe Resultat (dieselbe Deformation der Kugel) erzielt, obgleich dazu im zweiten Falle eine vielleicht tausendmal längere Zeit erforderlich war. Der gewöhnliche Sprachgebrauch bedient sich des Wortes „Effect" sogar mit Vorliebe zur Bezeichnung von Wirkungen ohne Rücksicht auf die Zeit.

Unter dem „Effect" für eine Glühlampe die für diese erforderliche Betriebsstärke (Watt) zu verstehen, widerspricht auch wohl dem Sinne, in dem das Wort „Effect" sonst gebräuchlich ist.

[2]) Bei der Electricität verhält sich die Sache bekanntlich anders. Wir können positive und negative electrische Quantitäten trennen und auf andere Körper übertragen.

[3]) Grundriß der mechanischen Physik, S. 318 und 319. Was hier von der Electricität gesagt ist, läßt sich nämlich auch auf den Magnetismus anwenden. — Siehe auch Andreas v. Ettingshausen, Anfangsgründe der Physik, 4. Aufl. (1860), S. 372 bis 374.

255099

denken, daß die magnetische Wirkung in die Ferne ganz dieselbe bleibt. Diese sogenannte äquivalente Anordnung des Magnetismus auf der Oberfläche hat man sich dann, wie die Theorie lehrt, immer so vorzustellen, daß auf einem Theile der Oberfläche (z. B. auf der einen Hälfte eines Stahlstabes) bloß nördlicher, auf der anderen hingegen bloß südlicher Magnetismus ausgebreitet ist. Man nennt diesen Magnetismus „freien" Magnetismus und die auf einer Flächeneinheit (Quadratcentimeter) der Oberfläche vorhandene Menge desselben die auf diesem Oberflächenstücke vorhandene „Flächendichte". Diese hat an den Polenden eines nicht geschlossenen Magneten die größten Werthe und nimmt von hier aus gegen den indifferenten Querschnitt hin sehr rasch bis auf Null ab. Ist die Flächendichte auf der ebenen und zur Magnetisirungsrichtung senkrechten Polfläche eines Magnetschenkels $= \sigma$, so stellt

$$P_1 = 2\pi\sigma^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 170)$$

die in Dynen ausgedrückte Tragkraft[1]) vor, die auf jedes Quadratcentimeter der Berührungsfläche zwischen Polfläche und Anker kommt.

In einem vollständig mit magnetisirenden Drahtwindungen bewickelten ringförmigen Eisenkern („Ringmagnet")[2]), der aus zwei Halbringen besteht, deren einer als tragender Magnet, der andere als Anker dient, kommt der Werth der Flächendichte σ dem Werthe des specifischen Magnetismus s um so näher, je höher der erreichte Sättigungsgrad der Magnetisirung ist. Man kann also bei solchen Ringmagneten annähernd

$$P_1 = 2\pi s^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 171)$$

setzen und insofern der erreichbare höchste Werth $\bar{s}$ des specifischen Magnetismus bekannt ist, den entsprechenden höchsten Werth $\bar{P}_1$ der Tragkraft pro Quadratcentimeter jeder der beiden Polflächen

$$\bar{P}_1 = 2\pi\bar{s}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 172)$$

berechnen. Die aus den Arbeiten verschiedener Beobachter (§. 26) hervorgehenden Werthe von $\bar{s}$ liegen in runder Zahl zwischen 1400 (Rowland)

---

[1]) Wir benutzen hier die sehr lehrreiche Abhandlung von J. Stefan, Ueber die Tragkraft der Magnete (Sitzungsberichte der Wiener Academie, Bd. 81 (1880), S. 89).

[2]) Die ersten zur Prüfung theoretischer Ergebnisse geeigneten und mit absoluten Messungen durchgeführten Tragkraftsversuche mit einem Ringmagnet enthält meine Abhandlung, Ueber electromagnetische Tragkraft (Sitzungsberichte der Wiener Academie, Bd. 61 (1870), S. 739). — Diese Versuche waren damals die einzigen, die Stefan, wie aus seiner vorstehend citirten Abhandlung hervorgeht, zur Prüfung seiner theoretisch abgeleiteten Tragkraftsformel benutzen konnte. Ferner wurden durch diese Versuche die bis dahin aufgestellten irrthümlichen und einander widersprechenden Behauptungen über die Tragkraft als Function der magnetisirenden Kraft aufgeklärt und richtig gestellt. Siehe Wüllner's Lehrbuch der Experimentalphysik, 5. Auflage, 3. Band, S. 1111.

und 1700 (Fromme, H. F. Weber). Diesen Werthen entsprechen $12^1/_2$ kg und $18^1/_2$ kg als größte Tragkräfte pro Quadratcentimeter [1]).

Dabei ist Folgendes zu bemerken. Ist P die Gesammttragkraft eines zweischenkeligen Magneten (z. B. Ringmagneten) vom Schenkelquerschnitte (Polfläche eines Schenkels) $= f$, so ist $P_1 = \frac{P}{2f}$.

Stahlmagnete geben viel geringere Tragkräfte pro Flächeneinheit. Bei sehr guten einlamelligen Stahlmagneten fand ich 2 kg pro Quadratcentimeter; bei einem ganz vorzüglichen fünflamelligen Haarlemer Magnet [2]) fand ich für die vorstehende mittlere Lamelle eine Tragkraft von 9 kg pro Quadratcentimeter [3]) der Polfläche.

Die aus dem Coulomb'schen Gesetze sich ergebende Formel 170 für die Tragkraft hat M. Reithoffer [4]) aus dem Principe der Erhaltung der Energie und in sehr einfacher Weise auch aus der Kraftlinientheorie abgeleitet.

66 **Magnetisches Moment.** Unter dem magnetischen Momente eines Magnetstabes können wir, wie aus den folgenden §§. 28 und 30 hervorgeht, auch das größte Drehungsmoment verstehen, das auf den Magnetstab in einem magnetischen Felde von der Intensität I einwirken kann, nämlich dann, wenn die magnetische Axe eine zu den Kraftlinien (§. 29) des homogenen magnetischen Feldes senkrechte Stellung hat. Man kann das magnetische Moment auch ausdrücken durch das Product der in einem Magnetpole concentrirt gedachten magnetischen Quantität mit der Poldistanz. Dabei verstehen wir unter den Polen die Angriffspunkte der Resultirenden der erdmagnetischen Parallelkräfte, die in entgegengesetzten Richtungen zur Hälfte auf die nördlichen und zur Hälfte auf die südlichen Magnetismen der magnetischen Molecüle wirken und somit ein resultirendes Kräftepaar ergeben. Die Verbindungs-

---

[1]) Bei meinen in der oben citirten Abhandlung beschriebenen Versuchen mit einem Ringmagnet erhielt ich bei der stärksten angewendeten Magnetisirung für jede Polfläche etwas über 10 kg pro Quadratcentimeter und schätzte das Maximum aus dem Versuchs-Diagramm auf $11^1/_2$ kg.

[2]) Der an der deutschen technischen Hochschule in Prag befindliche Magnet ist von Wetteren in Haarlem, wiegt 12,1 kg und trug 91,4 kg, während die Haecker'sche Formel $T = 103\, P^{2/3}$ (wobei Tragkraft T und Magnetgewicht P in Grammen gerechnet werden) nur 54 kg verlangt.

Wir wollen hier gelegentlich bemerken, daß eine theoretische Begründung der Haecker'schen Formel von Silv. P. Thompson gegeben worden ist in seinen Cantor Lectures on the electromagnet (1891), S. 33 und 34.

[3]) Die verstärkte Wirkung der vorstehenden mittleren Lamelle bei mehrlamelligen Magneten scheint mir analog zu sein der Verstärkung magnetischer Felder durch conische Polschuhe. Siehe J. Stefan, Ueber die Herstellung intensiver magnetischer Felder. (Sitzungsberichte der Wiener Academie, Bd. 97 (1888), S. 176.)

[4]) Zeitschrift für Electrotechnik (1895), Heft 20.

linie der Angriffspunkte desselben, nämlich der Pole, heißt magnetische Axe im engeren Sinne[1]). Die Länge dieser Axe, die Poldistanz, kann annähernd $= 5/6$ der Stablänge angenommen werden. Das magnetische Moment eines Magnetstabes wird durch Erschütterungen und durch Erwärmung geschwächt[2]).

67 **Experimentelle Ermittelung von M und H.** Ein horizontal schwingender Magnetstab vom Trägheitsmomente K und vom magnetischen Momente M hat eine Schwingungsdauer, die bei kleinen Schwingungsbogen

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{HM}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 173)$$

Secunden beträgt. Einer Declinationsnadel, in der ersten Hauptlage im verhältnißmäßig großen Abstande x gegenübergestellt, bewirkt derselbe Stab eine Ablenkung ω, deren Tangente annähernd der Gleichung

$$tg\,\omega = \frac{2M}{Hx^3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 174)$$

entspricht. Aus beiden Beobachtungen ergiebt sich sowohl M als auch H; denn aus 173 folgt $HM = \frac{\pi^2 K}{t^2}$ und aus 174 folgt $\frac{M}{H} = {}^1/_2\, x^3\, tg\,\omega$. Das Product dieser beiden Ausdrücke gibt M^2 und der Quotient H^2.

Dabei ist jedoch Folgendes zu bemerken. In der Formel 173 ist der Einfluß der Torsion des Aufhängungsfadens nicht berücksichtigt und auch der aus 174 sich ergebende Werth für $\frac{M}{H}$ kann nur als eine erste Annäherung gelten. Größere Genauigkeit erzielt man, wenn man beim Ablenkungsversuch zwei verschiedene Abstände $x = r_1$ und $x = r_2$ nimmt. Hat man in diesen beiden Fällen die Ablenkungen ω_1 und ω_2 beobachtet, so gibt die Gaußische Formel

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_1^5\, tg\,\omega_1 - r_2^5\, tg\,\omega_2}{r_1^2 - r_2^2} \quad \ldots \ldots \quad 175)$$

einen genaueren Werth für $\frac{M}{H}$[3]).

---

[1]) Die allgemeine Definition des Begriffes der magnetischen Axe gibt Gauß in seiner Abhandlung: Intensitas vis magneticae terrestris etc. Gauß' Werke (Göttingen 1867), Bd. 5, §. 5, S. 90. Eine präcise elementare Definition findet man in Andreas v. Ettingshausen, Anfangsgründe in der Physik, 4. Aufl., S. 366.

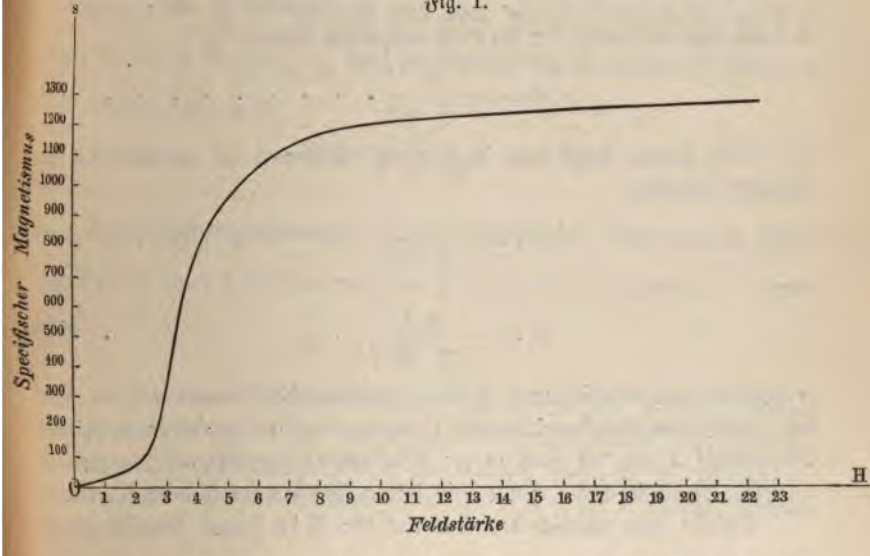
[2]) Diese Erscheinung erklärt sich einfach aus der in meiner Abhandlung über anomale Magnetisirung weiter ausgeführten Theorie der drehbaren Molecularmagnete. Siehe meinen Artikel „Magnet" in Karmarsch und Heeren's technischem Wörterbuche, 3. Aufl., S. 710.

[3]) Hinsichtlich des Näheren über die Ausführung solcher Messungen verweisen wir auf F. Kohlrausch, Praktische Physik (1901), S. 319 bis 325.

Will man die Werthe von H an zwei Beobachtungsorten vergleichen, so kann man dies, indem man an jedem dieser Orte entweder einen Schwingungsversuch (nach 173) oder einen Ablenkungsversuch (nach 174) ausführt. Am einfachsten ist Ersteres. Macht ein Magnetstab z. B. am Orte A 100 Schwingungen in 800 Secunden, am Orte B 100 Schwingungen in 808 Secunden und hätte die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus am ersteren Orte den Werth 0,200, so wäre deren Werth am zweiten Beobachtungsorte vermöge der aus 173 folgenden verkehrten Proportionalität mit dem Quadrate der Schwingungsdauer $= 0{,}200 \frac{8{,}00^2}{8{,}08^2} = 0{,}196$. Ist an einem Orte H bekannt, so kann M entweder durch einen Schwingungsversuch oder durch einen Ablenkungsversuch ermittelt werden.

Sättigungsgrad. Den Quotienten des magnetischen Momentes M 68
eines Magnetstabes durch den höchsten Werth $\overline{M}$, den das magnetische Moment

Fig. 1.



dieses Stabes bei ins Unendliche gesteigerter magnetisirender Kraft erreichen würde, habe ich „Sättigungsgrad" genannt[1]). Bezeichnen wir also denselben mit M_1, so ist

$$M_1 = \frac{M}{\overline{M}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 176)$$

[1]) Ueber die Coërcitivkraft verschiedener Stahlsorten, Poggendorff's Annalen, Bd. 121 (1863), S. 439.

Bekanntlich ist bei Electromagneten das magnetische Moment bei aufsteigender Magnetisirung anfangs der magnetisirenden Kraft proportional (Lenz-Jacobi'sches Gesetz) und ich habe nachgewiesen [1]), daß die obere Grenze der Giltigkeit dieses Gesetzes in der Regel erreicht wird, wenn die Magnetisirung des Stabes der halben Sättigung ($M_1 = 1/2$) sich nähert. Von dieser Grenze angefangen, wird die bisher nach einer kleinen Convexität bei beginnender Magnetisirung merklich geradlinige Magnetisirungscurve, Fig. 1 (a. v. S.) [2]), gegen die Abscissenaxe concav und für sehr große Abscissen derselben parallel, z. B. entsprechend der Formel von Lamont [3]):

$$M = \frac{A\overline{M}S}{\overline{M} + AS} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 177)$$

worin A eine Constante und S die magnetisirende Kraft vorstellt, während M und $\overline{M}$ die bereits angegebenen Bedeutungen haben. Dividirt man Zähler und Nenner durch $A\overline{M}$ und bezeichnet die Quotienten $\frac{1}{A}$ und $\frac{1}{\overline{M}}$ mit a und b, so erhält man die später von Frölich aufgestellte Formel [4]):

$$M = \frac{S}{a + bS} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 178)$$

Diese Formel findet man in Frölich's Schriften auf zweierlei Art geschrieben; entweder

$$M = \frac{J}{a + bJ} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 179)$$

oder

$$M = \frac{mJ}{a + bmJ} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 180)$$

je nachdem man nämlich unter S den magnetisirenden Strom oder die Zahl der sogenannten Ampèrewindungen (Product der in Ampère ausgedrückten Stromstärke J mit der Zahl m der Windungen) der Magnetisirungsspirale versteht. Natürlich haben a und b in beiden Formeln verschiedene Werthe.

Dividirt man nämlich den Ausdruck für M in Formel 180 im Zähler

---

[1]) Ueber die Grenzen der Magnetisirbarkeit u. s. w. Sitzungsberichte der Wiener Academie, Bd. 59 (1869), S. 782 und Electromagnetische Untersuchungen u. s. w. 2. Abhandlung, Anhang. Sitzungsber. der Wiener Academie, Bd. 61 (1870), S. 791.

[2]) Nach J. A. Ewing, Magnetic induction in iron and other metals (1892), S. 53. Den convexen Theil findet man übrigens bei Stäben nicht so stark auf Kosten des geradlinigen ausgeprägt, wie in dieser für einen langen Draht typischen Curve.

[3]) Lamont, Handbuch von dem Magnetismus 1867, S. 41.

[4]) Monatsbericht der Berliner Academie vom 18. November 1880, S. 973.

und Nenner durch m, so erhält man $M = \frac{J}{\frac{a}{m} + bJ}$, woraus erhellet, daß die Constante a in Formel 179 einen anderen Werth hat als in 180 und eine der Windungszahl m verkehrt proportionale Größe ist, wie schon Frölich bemerkt hat. Die Constanten a und b in der Formel 180 hängen nur von den Dimensionen des magnetisirten Stabes ab. Die Form dieser Abhängigkeit hat K. Zickler in seinen „Electromagnetischen Untersuchungen“ [1]) festgestellt.

Aus jeder der drei letzten Formeln ist ersichtlich, daß der Maximalwerth von M (für $S = \infty$ oder $J = \infty$) durch $\frac{1}{b}$ ausgedrückt wird, also:

$$\overline{M} = \frac{1}{b} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 181)$$

Will man die auf diesen Maximalwerth bezogenen relativen Magnetismen oder Sättigungsgrade M_1 berechnen, so muß man, wie aus 176 erhellet, die Ausdrücke für M, z. B. $\frac{J}{a + bJ}$, durch den Ausdruck für $\overline{M}$, nämlich $\frac{1}{b}$, dividiren. Wir erhalten dann z. B.

$$M_1 = \frac{bJ}{a + bJ} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 182)$$

Magnetisirungsfunction. Diese Gleichung kann, indem man im Zähler 69
und Nenner durch a dividirt und $\frac{b}{a} = p$ setzt, auch in der Form:

$$M_1 = \frac{pJ}{1 + pJ} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 183)$$

geschrieben werden. Denselben Ausdruck hat J. Stefan in seiner Abhandlung über die Tragkraft der Magnete [2]) auf einem anderen Wege abgeleitet, nämlich aus der Gleichung für den geradlinigen Theil der die Magnetisirungsfunction darstellenden Curve Fig. 2 (a. f. S. [3]). Diese Gleichung hat die Form

$$k = \frac{s}{H} = A\,(\bar{s} - s) \quad \ldots \ldots \quad 184)\,[4])$$

---

[1]) Zeitschrift für Electrotechnik, Bd. 7 (1889), S. 361.

[2]) Sitzungsberichte der Wiener Academie, Bd. 81 (1880, Januar), S. 100.

[3]) Diese Curve bezieht sich auf eine Versuchsreihe von Rowland. Wir kommen im Paragraphen über das magnetische Maximum darauf zurück.

[4]) Man hat die Größe $\frac{s}{H}$ auch Magnetisirungszahl oder Susceptibilität (Aufnahmsfähigkeit, Magnetisirbarkeit) genannt. Siehe Ewing, Magnetic induction etc. S. 18.

Im Sinne der Gleichung $y - y' = tg\,\alpha\,(x - x')$ einer Geraden, die durch einen bestimmten Punkt $x' = \bar{s}$ und $y' = 0$ geht, also $y = tg\,\alpha\,(s - \bar{s})$, ist in der Gleichung 184 offenbar $A = - tg\,\alpha$.

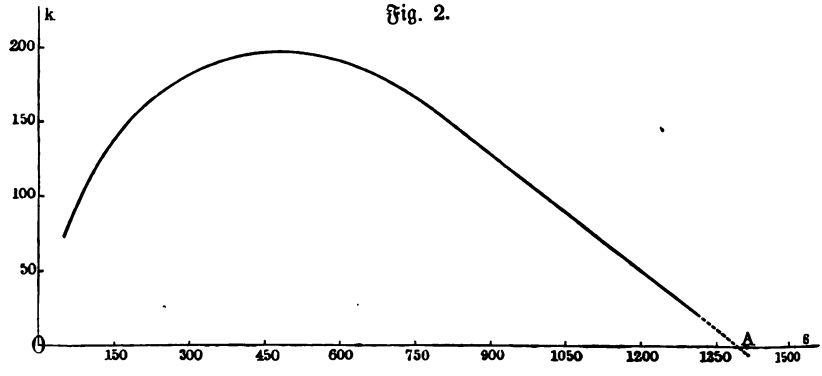
Die Gleichung führt zu dem Ausdrucke

$$M_1 = \frac{s}{s} = \frac{AH}{1 + AH} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 185)$$

der, da H mit J proportional und A eine Constante ist, mit dem Ausdrucke 183 übereinstimmt.

Die Magnetisirungsfunction (oder Magnetisirungszahl) k ist also der Quotient des specifischen Magnetismus s einer in einem homogenen

Fig. 2.



magnetischen Felde magnetisirten Eisenmasse durch die magnetisirende Kraft, also durch die Intensität H dieses magnetischen Feldes.

Da s nur bis zu einem gewissen Grenzwerthe wachsen kann, so muß die Magnetisirungszahl k bei wachsender magnetisirender Feldstärke H der Null sich nähern. Wir kommen bei Besprechung des magnetischen Maximums darauf zurück.

70 **Permeabilität.** Unter Verhältnissen, die eine gleichförmige Magnetisirung der Eisenmasse möglich machen, befindet sich z. B. der verhältnißmäßig dünne[1]) Eisenkern eines Ringmagneten oder annähernd auch ein verhältnißmäßig langer gerader Eisenstab in einer mindestens ebenso langen Magnetisirungsspirale.

Die Feldintensität im Inneren einer Magnetisirungsspirale ist

$$H = 4\,\pi\,m_1\,i \quad \ldots \ldots \ldots \quad 186)^2)$$

[1]) J. Stefan, Ueber die Tragkraft der Magnete, S. 91 und 92.

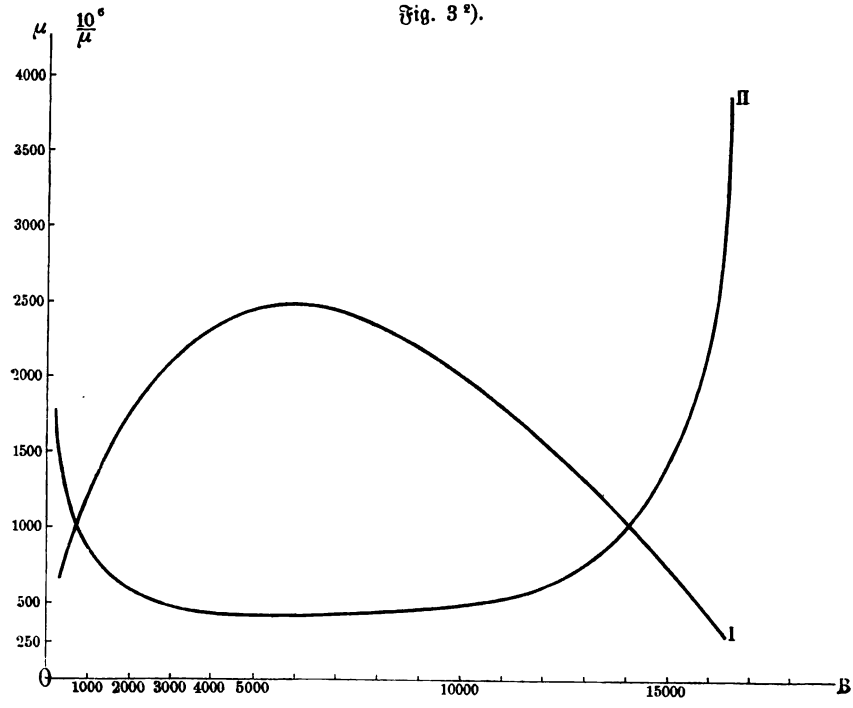
[2]) Schreibt man die Formel 186 in der Gestalt $H = \frac{4\,\pi}{10}\,m_1 J$, wobei J die Stromstärke in Ampère bedeutet, dann ist $m_1 J$ die Zahl der Ampère-Windungen

wobei m_1 die auf die Längeneinheit (Centimeter) vertheilte Anzahl der Spiralwindungen und i die auf die abſolute Stromeinheit (10 Ampère) bezogene magnetiſirende Stromſtärke bedeuten. Dieſe Größe H ſtellt auch die Zahl der Kraftlinien pro Flächeneinheit (Quadratcentimeter) im Inneren der leeren Magnetiſirungsſpirale vor. Enthält die Spirale einen Eiſenkern, ſo wird die Zahl der in dieſem verlaufenden Kraftlinien pro Flächeneinheit bei gleichem H viel größer, z. B. B ſein. Man hat den Quotienten

$$\frac{B}{H} = \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 187)$$

magnetiſche Permeabilität genannt[1]). Dieſe nimmt mit zunehmendem Sättigungsgrade des Eiſens zuerſt zu und ſpäter, nach Ueberſchreitung eines gewiſſen Maximums, wieder ab. Siehe Curve I in Fig. 3.

Fig. 3[2]).



pro Längeneinheit. Da $\frac{4\pi}{10} = 1{,}257$ nicht viel von $\frac{5}{4}$ verſchieden iſt, ſchreibt man oft annähernd $m_1 J = 0{,}8\, H$. Um alſo z. B. die Feldſtärke $H = 10$ hervorzubringen, ſind ziemlich genau 8 Ampère-Windungen pro Centimeter erforderlich.

[1]) Siehe Ewing, Magnetic induction etc., S. 14 bis 19.

[2]) Dieſe Curven ſind, ſowie Fig. 2, von Herrn H. Eisler aus einer Verſuchsreihe von Rowland conſtruirt.

Betrachtet man B als die Summe der auf die Flächeneinheit bezogenen Kraftlinienzahlen, nämlich H für die leere Spirale (Formel 186) und $4\pi s$ für den Eisenkern (Formel 266), also

$$B = 4\pi s + H \quad \ldots\ldots\ldots \quad 188)$$

so gibt die Division durch H mit Rücksicht auf 184 und 187:

$$\mu = 4\pi k + 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 189)$$

wogegen man nach der Auffassung von Bosanquet[1]) als magnetische Permeabilität den Quotienten

$$\mu = \frac{4\pi s}{H} = 4\pi k \quad \ldots\ldots\ldots \quad 190)$$

anzusehen hätte. In beiden Gleichungen ist k die Magnetisirungsfunction.

Der Grenzwerth der Permeabilität bei steigender magnetisirender Kraft ist also nach der gewöhnlichen Definition Eins und nach der Definition von Bosanquet Null.

Man nennt die in der Formel 188 ausgedrückte Größe B auch die magnetische Induction des magnetisirten Eisenkernes. Dagegen wäre nach Bosanquet nur die Größe $4\pi s$ als magnetische Induction anzusehen[2]) und $\frac{4\pi s}{H}$ als die Permeabilität des Eisens. Wir wollen dafür die Bezeichnungen

$$B_0 = 4\pi s \quad \ldots\ldots\ldots \quad 191)$$

und

$$\mu_0 = \frac{B_0}{H} = 4\pi \frac{s}{H} = 4\pi k \quad \ldots \quad 192)$$

einführen. Die Magnetisirungscurve und die Permeabilitätscurve sind dann geometrisch ähnlich. Multiplicirt man nämlich zusammengehörige Abscissen- und Ordinatenwerthe der Magnetisirungscurve mit 4π, so erhält man die correspondirenden zusammengehörigen Abscissen- und Ordinatenwerthe der Permeabilitätscurve.

So gilt z. B. für den geradlinigen Theil der Magnetisirungscurve die Gleichung 184

$$k = \frac{s}{H} = A(\bar{s} - s)$$

und es entsteht daraus nach beiderseitiger Multiplication mit 4π die Gleichung für den geradlinigen Theil der Permeabilitätscurve

$$4\pi k = \mu_0 = \frac{4\pi s}{H} = \frac{B_0}{H} = A(\bar{B}_0 - B_0). \quad \ldots \quad 193)$$

Nach der vorliegenden Rowland'schen Curve (Fig. 31) entspricht das Maximum der Permeabilität μ im Betrage von nahezu 2500 etwa der Kraft-

[1]) Phil. Mag. (5), 15 (1883), S. 207 und Phil. Mag. (5) 19 (1885), S. 75.

[2]) Da ja nur die Aenderungen von s, nicht aber jene von H von den magnetischen Zustandsänderungen des Eisens ausgehen. Siehe Phil. Mag. (5), 15 (1883), S. 207 und Phil. Mag. (5), 19 (1885), S. 75.

linienzahl $B = 6000$ und ungefähr dem Werthe $k = 200$ der Magnetisirungscurve (Fig. 2), entsprechend etwa dem specifischen Magnetismus $s = 480$ und der magnetisirenden Feldstärke $H = \frac{480}{200} = 2{,}4$. — Man hat übrigens auch schon viel größere Permeabilitätswerthe (z. B. 3000 bis 4000 bei sehr weichen Eisen- und Gußstahlsorten) gefunden.

Für $B = 16\,500$ (letzter Punkt der Curve Fig. 3 I) ist annähernd $\mu = 250$, also $H = \frac{16\,500}{250} = 66$.

Man hat auch Formeln aufgestellt, um die Permeabilität als Function der Kraftliniendichte darzustellen. Hierher gehören z. B. die Formeln von Fleming[1]):

$$\left.\begin{aligned} \mu &= 5{,}6\ B^{-\frac{2}{3}} \\ \text{oder} \quad \mu &= 5{,}3\ B^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ 194)$$

je nachdem B zwischen 1000 und 5000 oder zwischen 5000 und 10 000 liegt, und die allgemeinere Formel von Zickler[2])

$$\mu = \bar{\mu}\left[\frac{1}{10} + \frac{31}{15}\left(\frac{B}{B'}\right) - \frac{21}{15}\left(\frac{B}{B'}\right)^2 + \frac{7}{30}\left(\frac{B}{B'}\right)^3\right] \quad \ldots\ 195)$$

wobei $\bar{\mu}$ das Permeabilitäts-Maximum und B' die diesem entsprechende Kraftliniendichte bedeutet.

Ist $\mu = f(B)$ gegeben, also $\frac{B}{H} = f(B)$, so kann man $H = \frac{B}{f(B)} = F(B)$, und somit die Magnetisirungscurve daraus ableiten.

Tragkraft, magnetische Induction und Permeabilität. Setzt man 71
in die Formel 171 ($P_1 = 2\pi s^2$) aus 191 den Werth $s = \frac{B_0}{4\pi}$ ein, so erhält man

$$P_1 = \frac{B_0^2}{8\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ 196)$$

und es ist sofort ersichtlich, daß die Ermittelung der Tragkraft eines Electromagneten auch dazu dienen kann, die magnetische Induction B_0 im Eisenkern und, insofern die magnetisirende Feldstärke $H = \frac{4\pi}{10}\, m_1 J$ bekannt ist, auch die Permeabilität $\mu_0 = \frac{B_0}{H}$ annähernd zu finden.

---

[1]) Fleming, Alternate Current Transformers II, S. 515 und 516. Die Formeln geben, wie sofort ersichtlich, nur einen Theil der Curve.

[2]) Zeitschrift für Electrotechnik 1895, Heft 19. Die abgekürzte Formel 195 setzt voraus, daß der Anfangswerth der Permeabilität $\frac{1}{10}$ des Maximalwerthes ist. Hinsichtlich der Begründung dieser Voraussetzung verweisen wir auf die citirte Abhandlung.

Es sei z. B. G die (allenfalls mit einer Federwaage) gemessene Tragkraft in Grammen eines zweischenkeligen Magneten und die Berührungsfläche zwischen Schenkel und Anker für jeden der beiden Schenkel f Quadratcentimeter, dann ist die in Dynen ausgedrückte Tragkraft für ein Quadratcentimeter Berührungsfläche $P_1 = \frac{981\,G}{2f}$. Setzt man nun diesen Werth in die Gleichung 196 ein, so ergibt sich daraus

$$B_0 = 111 \sqrt{\frac{G}{f}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 197)$$

Bilden Schenkel und Anker eines Electromagneten einen Ringmagnet von constantem Eisenquerschnitte und durchaus gleichförmiger Bewickelung, dann läßt sich auch die magnetisirende Feldstärke $H = \frac{4\pi}{10} m_1 J$ und somit auch die jedem Versuche entsprechende magnetische Permeabilität $\mu_0 = \frac{B_0}{H}$ des Eisenkernes ermitteln. Dabei bedeutet m_1 (siehe Formel 186) die auf je eine Strecke = 1 Centimeter des bewickelten Ringeisens kommende Zahl der Drahtwindungen und J die magnetisirende Stromstärke in Ampère.

Die nachstehende Tabelle enthält beispielsweise eine Zusammenstellung einiger Resultate aus meinen im §. 65 (Anmerkungen) besprochenen Tragkraftsversuchen.

Der Eisenkern eines jeden der beiden Halbringe hatte einen kreisförmigen Querschnitt von 1 cm Durchmesser, eine Länge von 18,1 cm und war mit 52 Windungen bewickelt. Das Tragkraftsmaximum wurde nach dem Versuchsdiagramm auf 18 kg geschätzt.

Q bedeutet die Gesammttragkraft in kg und P_1 die auf 1 cm² Berührungsfläche zwischen Schenkel und Anker sich ergebende Tragkraft in Dynen, also $P_1 = \frac{981\,000\,Q}{2 \times 0{,}785}$.

Nr.	J [A]	$m_1 J$	H	Q	P_1	B_0	$\mu_0 = \frac{B_0}{H}$
1	1,34	4,41	5,54	5,87	$3{,}35 \times 10^6$	9 181	1656,70
2	3,38	10,29	12,93	8,97	$5{,}60 \times 10^6$	11 866	917,56
3	4,86	12,38	15,75	10,27	$6{,}42 \times 10^6$	12 696	806,06
4	8,72	23,08	31,48	13,87	$8{,}66 \times 10^6$	14 755	468,64
5	22,68	63,02	81,71	16,24	$10{,}14 \times 10^6$	15 966	195,41

*) Die Einwendungen sind von den in der Original-Abhandlung gebrauchten deutschen Ausdrücken entnommen.

Für einen einschenkeligen Magnet (z. B. geraden Stab) erhält man aus Formel 196

$$B_0 = 157 \sqrt{\frac{G}{f}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 198)$$

Diese Formel findet Anwendung bei dem von Silv. P. Thompson construirten Permeameter[1]). Auf eine nähere Beschreibung dieses Apparates kann hier nicht eingegangen werden und noch weniger auf die Erörterung der complicirteren Apparate und Methoden zu genaueren Permeabilitätsbestimmungen.

Schließlich möge hier noch die Formel 186 für die Feldstärke in einer Magnetisirungsspirale, von der wir hier ausgegangen sind, ihre Begründung finden.

Wir denken uns im Inneren der verhältnißmäßig langen (oder engen) Spirale längs der Axe ein magnetisches Theilchen z. B. von der Quantität $+ 1$ binnen der Zeit t gleichförmig und entgegen der Richtung der Kraftlinien von einem Ende der Spirale zum anderen bewegt, so, daß deren Länge L mit der Geschwindigkeit $\frac{L}{t}$ zurückgelegt wird. Durch diesen Vorgang wird in den Spiralwindungen eine electromotorische Kraft $e = \frac{4\pi m}{t}$ inducirt, nämlich gleich der Zahl der in der Zeiteinheit von den Spiralwindungen geschnittenen Kraftlinien[2]), deren (nach §. 29) 4π vom magnetischen Punkte ausgehen und die, wenn die Spirale verhältnißmäßig eng ist, fast sämmtlich von Spiralwindungen getroffen werden. Der auf solche Art inducirte Strom i besitzt die Arbeitsstärke $ie = \frac{4\pi m i}{t}$. Die bei dieser Induction nach dem Lenz'schen Gesetze aufzuwendende Arbeit ist, gleichfalls auf die Zeiteinheit bezogen, $= \frac{HL}{t}$, da die vom Strome i herrührende in der Spirale herrschende magnetische Feldstärke H der Bewegung des magnetischen Theilchens längs der Axe in der Art entgegenwirkt, daß auf dem ganzen Wege L durch die Spirale binnen der Zeit t die Arbeit HL verrichtet wird.

---

[1]) Beschrieben in Silv. P. Thompson's Schriften The Electromagnet und Dynamoelectric Machinery. Andere Apparate und Methoden dieser Art findet man auch in Dr. Erich Schmidt's Buche: Die magnetische Untersuchung des Eisens und verwandter Metalle. Halle, 1900.

[2]) Daß die inducirte electromotorische Kraft gleich ist der Zahl der in der Zeiteinheit geschnittenen Kraftlinien, ergibt sich schon aus der Betrachtung des im §. 43 beschriebenen Inductionsvorganges, wenn man erwägt, daß dort das Product Flv (in Formel 115) die Zahl der beim beschriebenen Vorgange in der Zeiteinheit geschnittenen Kraftlinien darstellt.

Es ergibt sich demnach die Gleichung

$$\frac{4\pi m i}{t} = \frac{HL}{t}, \text{ somit } H = \frac{4\pi m i}{L} = 4\pi m_1 i,$$

übereinstimmend mit der Formel 186.

72 **Magnetisches Maximum.** Die in Fig. 2 gezeichnete Curve stellt den Verlauf der Magnetisirungsfunction k für einen bestimmten Fall dar[1]). Die anfangs rasch ansteigende und dann wieder abfallende, also gegen die Abscissenaxe concave Curve nimmt bald nach Ueberschreitung des Maximums einen merklich geradlinigen, der Gleichung 184 entsprechenden Verlauf, indem sie sich, mit der Abscissenaxe einen spitzen Winkel bildend, scheinbar einem Durchschnittspunkte mit dieser nähert. Die Abscisse dieses Durchschnittspunktes ist dann das Maximum $\bar{s}$ des specifischen Magnetismus, entsprechend der Annahme $H = \infty$, also $k = 0$. Der Durchschnitt mit der Ordinatenaxe liegt gleichfalls außerhalb des Bereiches der Beobachtungen, denn er entspricht dem Falle $s = 0$. Die Verlängerung der Curve nach rückwärts führt aber auf einen endlichen positiven Werth (etwa 26) für die die Susceptibilität bei beginnender Magnetisirung darstellende Ordinate dieses Durchschnittspunktes. Aus dieser Versuchsreihe ergibt sich für $\bar{s}$ in runder Zahl der Werth 1400. Dagegen schließt Fromme aus seinen Versuchen[2]), daß die Curve der Magnetisirungsfunction einen Wendepunkt habe, indem sie bei der Annäherung an die Abscissenaxe gegen diese convex werde und in Folge dessen die Abscissenaxe später schneide, als die Verlängerung des geradlinigen Theiles. Mit Berücksichtigung dieses Umstandes fand Fromme $\bar{s} = 1730$. Auch H. F. Weber fand $\bar{s} = 1700$[3]).

Wollte man aber nach Anderen[4]) 26 Kapp-Linien (d. i. $26 \times 6000 = 156000$ CGS-Linien) auf den englischen Quadratzoll, also 24180 CGS-Linien auf ein Quadratcentimeter als größte Kraftlinienzahl für weiches Eisen annehmen, so würde dies $\bar{s} = 1924$ voraussetzen. Bei meinen im Jahre

---

[1]) Diese Curve bezieht sich auf die in der citirten Abhandlung von J. Stefan besprochene Versuchsreihe von Rowland.

[2]) Göttinger Nachrichten 1875 und Dissertation vom Jahre 1874. Siehe auch Fromme, Zur Frage nach dem Maximum des temporären Magnetismus. Wied. Ann., Bd. 33 (1888), S. 234 u. 235.

[3]) Dabei zeigte sich, wenn die magnetisirende Kraft $H = 4\pi m_1 i$ einen gewissen, etwa zwischen 700 und 1200 gelegenen Werth überschritten hatte, keine erhebliche Zunahme des Magnetismus mehr.

[4]) Das Electrical Trades Directory and Handbook: „The Electrician" vom Jahre 1892 enthält S. 162 die Annahme, daß Armatur-Eisen mit 26 Kapp-Linien auf den englischen Quadratzoll und Feldmagnet-Eisen mit 18 Kapp-Linien auf den englischen Quadratzoll gesättigt ei.

1865 ausgeführten (1870 veröffentlichten) Untersuchungen[1]) fand ich für $\bar{s}$ Werthe, die zwischen 1400 und 1500 liegen. Als ich aber aus allen damals mir bekannten electromagnetischen Untersuchungen (von J. Müller, W. Weber, Dub und Waßmuth), die die zur Berechnung von $\bar{s}$ erforderlichen Angaben enthielten, diese Größe berechnete, fand ich, mit Einbeziehung der Ergebnisse meiner eigenen Untersuchungen, den Mittelwerth $\bar{s} = 1653$. In neuerer Zeit fanden Ewing und Low bei Lowmoor-Eisen $\bar{s} = 1680$ und bei schwedischem Eisen $\bar{s} = 1700$ als thatsächlich beobachtete Werthe[2]).

Daß die anfangs gegen die Abscissenaxe concave Curve der Magnetisirungsfunction k einen Wendepunkt hat und also später convex wird und zuletzt vielleicht sogar asymptotisch gegen die Abscissenaxe verläuft, hat J. Haubner[3]) bei seinen Versuchen mit Ringmagneten bestätigt gefunden. Durch geradlinige Verlängerung des letzten Theiles der Curve erhielt er einen Durchschnittspunkt, dem $\bar{s} = 1620$ als Abscisse entspricht.

Als Gesammtmittel aus den hier erwähnten älteren und neueren Untersuchungen ergab sich $\bar{s} = 1647$, was der von mir schon im Jahre 1865 berechneten Zahl $\bar{s} = 1653$ sehr nahe kommt.

Nimmt man die Proportionalität zwischen s und H bis zur halben Sättigung $\left(s = \frac{\bar{s}}{2}\right)$ an, so entspricht dieser ein specifischer Magnetismus von rund 800 C-G-S-Einheiten. Bei bestmagnetisirten Stahlstäben kann man nach einer Bemerkung von W. Weber[4]) ein Moment von 400 Gaußischen Einheiten pro Milligramm, d. i. 40 C-G-S-Einheiten pro Gramm, also rund 300 C-G-S-Einheiten pro Cubikcentimeter annehmen. — Schneebeli magnetisirte Stahlnadeln bis zu $s = 500$ und eine dünne Stricknadel bis zu $s = 800$.

Unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Magnetisirung würden den specifischen Magnetismen 300 und 600 Tragkräfte von etwas über $^1/_2$ kg und 2 kg pro 1 cm^2 (Formel 171) entsprechen.

Wenn man erwägt, daß, wie aus den vorstehenden Angaben hervorgeht, selbst die besten Stahlmagnete immer noch viel geringere Sättigungsgrade aufweisen als jene, die sich in eisernen Electromagneten ohne Schwierigkeit

---

[1]) Ueber die Grenzen der Magnetisirbarkeit des Eisens und des Stahles. Sitzungsber. d. Wiener Academie, Bd. 59 (1869), S. 780.

[2]) Siehe Fromme's oben citirte Abhandlung und J. A. Ewing, Magnetic induction in iron and other metals (1892), S. 136 und 135.

[3]) Sitzungsber. d. Wiener Academie, Bd. 82 (1880), S. 777.

[4]) Siehe: Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins in Göttingen in der Abhandlung: Messung starker galvanischer Ströme.

erreichen lassen ($1\frac{1}{2}$ und darüber), so ist einleuchtend, daß Dynamomaschinen viel mehr leisten, als Inductionsmaschinen mit Stahlmagneten.

73 **Magnetisirungsformeln.** In der Einleitung zur Lamont'schen Formel (177) ist erwähnt, daß die Magnetisirungscurve Fig. 1, die den erregten Magnetismus als Function der magnetisirenden Kraft darstellt, nach einer kleinen anfänglichen Convexität merklich geradlinig verläuft und später, d. i. für Magnetisirungen, die der halben Sättigung nahe kommen, oder diese überschreiten, gegen die Abscissenaxe concav wird. Für diesen concaven Theil gelten die Formeln von Lamont oder Frölich (177 bis 180) und auch die Müller'sche Formel für cylindrische Eisenstäbe

$$y = Bd^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{Ad^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 199)$$

wobei x die Zahl der Ampèrewindungen der Magnetisirungsspirale, y das erregte magnetische Moment und d den Stabdurchmesser bedeuten, während A und B Coëfficienten sind, von denen ich nachgewiesen habe[1]), daß annähernd

$$A = \frac{6112}{\sqrt{l}} \quad \text{und} \quad B = 14{,}4\,l,$$

wenn man mit l die Stablänge bezeichnet.

Dagegen habe ich für den geradlinigen Theil der Magnetisirungscurve, also für geringere Sättigungsgrade, auf Grundlage von Lehrsätzen von Dub und W. Thomson den Satz

$$y = k\sqrt{l^3 d}\,.\,mJ \quad \ldots\ldots\ldots \quad 200)$$

aufgestellt. Den Coëfficienten k habe ich zwischen 0,12 und 0,15 liegend[2]) und zwar in den meisten von mir untersuchten Fällen nahezu

$$k = 0{,}135$$

gefunden. Je kleiner das Verhältniß $\frac{l}{d}$ wird, also je dicker verhältnißmäßig die Stäbe sind, desto mehr nähert sich k dem Werthe 0,15[3]).

Will man in die Müller'sche Formel das Gewicht γ des untersuchten

---

[1]) Wiedemann's Annalen, Bd. 27 (1886), S. 630 bis 635. Auch Centralbl. für Electrotechnik, Bd. 8 (1886), S. 180.

[2]) Für Stäbe, deren Gewichte von 56 Grammen bis 174 Kilogrammen und deren $\frac{l}{d}$ von 18 bis 1,9 verschieden waren. Näheres enthält meine Abhandlung: Neuere Versuche über die Magnetisirungsformel. Wiedem. Ann., Bd. 32 (1887), S. 133 bis 139.

[3]) Auch hier ist durchwegs vorausgesetzt, daß m die Windungszahl der Magnetisirungsspirale und J die Stromstärke in Ampère bedeute.

stabes einführen, weil es leichter als die Dimensionen des Stabes genau bestimmt werden kann, so nimmt die Formel die Gestalt an:

$$y = \beta\gamma \; arctg \frac{x}{\alpha\gamma^{3/4}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 201)$$

wobei β und α die an die Stelle von B und A in der Formel 191 tretenden Constanten sind.

Müller hat die Constanten seiner Formel stets in der Voraussetzung bestimmt, daß die Tangentenbogen (*arctg*) in Graden (nicht in Längeneinheiten) angegeben werden, daß also $arc(tg = \infty) = 90$ $\left(\text{nicht} = \frac{\pi}{2}\right)$ gesetzt wird. Unter dieser Voraussetzung erhält man aus 201 für das Maximalmoment $\bar{y}$ eines Eisenstabes vom Gewichte γ den Werth $\bar{y} = 90\,\beta\,\gamma$, also $90\,\beta = \frac{\bar{y}}{\gamma} = \bar{s}$, nämlich gleich dem Maximalwerthe des specifischen Magnetismus, wofür wir nach den vorausgegangenen Erörterungen über das magnetische Maximum im C-G-S-System eine nahe an 1700 heranreichende Zahl, etwa 1653, annehmen können. Man hätte dann $\beta \doteq 18{,}37$ zu setzen. Dagegen hängt die Constante α auch von den Dimensionen des magnetisirten Stabes ab, worauf jedoch nicht weiter eingegangen werden soll [1]).

Bequemer als die Müller'sche Formel und auch gebräuchlicher sind die fast ausschließlich angewendeten Formeln von Frölich (178, 179 und 180).

Da ich nachgewiesen habe [2]), daß prismatische Eisenstäbe genau dasselbe electromagnetische Verhalten zeigen, wie gleich lange cylindrische von gleich großem Querschnitte, so sind alle Magnetisirungsformeln, wenn sie auch zunächst nur für cylindrische Stäbe nachgewiesen worden sind (wie z. B. die Müller'sche Formel) ebenso gut auch für pris-

---

[1]) Die *arctg*-Function ist vielfach angewendet worden, um den Zusammenhang zwischen erregtem Magnetismus und magnetisirender Kraft darzustellen. Die sogenannte Tangentenfunction von Kapp (bei der Berechnung der Dynamomaschinen von ihm angewendet) ist von dieser Art. (Siehe Kittler, Handbuch der Electrotechnik I, S. 35 und 792.) Auch der Zusammenhang zwischen der Tragkraft eines Electromagneten und der magnetisirenden Kraft läßt sich, wie ich nachgewiesen habe, durch eine derartige Formel annähernd ausdrücken. (Sitzungsber. der Wiener Academie 1870, S. 752 und 753.)

Bezüglich der Exponentialformeln verweisen wir auf Lamont's Handbuch vom Magnetismus und auf Sohnke's Abhandlung in der Electrotechnischen Zeitschrift 1883.

[2]) In der bereits citirten zweiten Abhandlung meiner Electromagnetischen Untersuchungen. Sitzungsber. der Wiener Academie, Bd. 61 (1870), S. 781. Satz IV. Dagegen fand ich, daß Bündel aus prismatischen oder cylindrischen Eisenstäbchen, wenn sie nicht dicht beisammen liegen, sich etwas anders verhalten, als gleich lange massive Stäbe von gleich großem Querschnitte. Siehe ebendaselbst, S. 782, Satz VI.

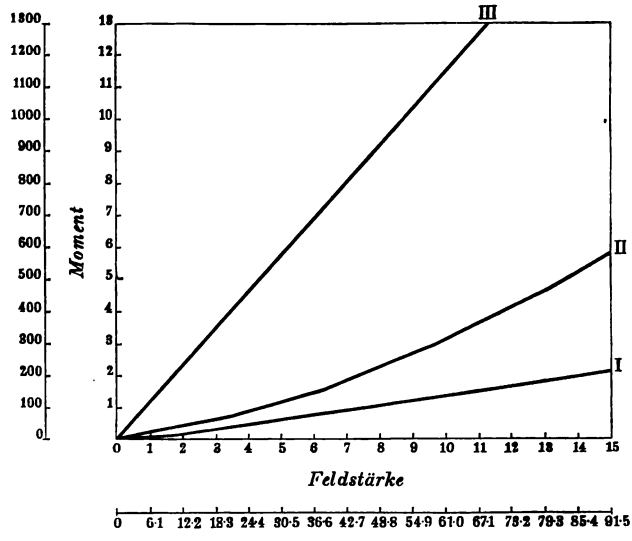
Bei Stahlstäben trifft dies, wie ich gefunden habe, nicht genau zu. Siehe Poggendorff's Annalen, Bd. 121 (1863), S. 450.

matische Stäbe anwendbar; man hat nur für d den Werth des Durchmesse desjenigen Kreises einzusetzen, dessen Flächenraum der Querschnittsfläche f d untersuchten prismatischen Stabes gleichkommt, also

$$d = \sqrt{\frac{4}{\pi} f} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 20$$

74 **Verhalten des Stahles und feinzertheilten Eisens.** Es würde weit gehen, auf die hier in Betracht kommenden characteristischen Verschiede heiten im Vergleiche mit weichem Eisen näher einzugehen und es mag deßha genügen, diese in einem leicht übersichtlichen Diagramm (Fig. 4) beispielswe anschaulich zu machen.

Fig. 4.



Die Figur zeigt die Magnetisirungscurven von gleichlangen (103 m und gleichschweren ($22^1/_2$ g) Cylindern aus weichen Eisenfeilspähnen (I), gl hartem Wolframstahl (II) und weichem Eisen[1]) (III). Man sieht hieraus

[1]) Aus meinen Abhandlungen: Ueber das electromagnetische Verhalten Stahles. Sitzungsber. der Wiener Academie, Bd. 48 (1863), S. 543 und U die Coërcitivkraft verschiedener Stahlsorten. Poggendorff's Ann., Bd. 121 (18 S. 445.

Die Eisenfeilspähne wurden in beiderseits verkorkten Glasröhren, die damit einer Länge von 103 mm (gleich der Länge der verglichenen Stäbe) gefüllt wa untersucht. Diese von mir im Jahre 1865 ausgeführten Untersuchun waren die ersten, die über das electromagnetische Verhalten des f zertheilten Eisens veröffentlicht worden sind, was aus G. Wiedeman Darstellung [Galv. u. Electromagn. 3. Aufl. (1883), Bd. 3, S. 552 bis 554] w

verhältnißmäßig große Ausdehnung des convexen Theiles der Stahlcurve und daß feinzertheiltes Eisen ein dem der härtesten Stahlsorten ähnliches Verhalten mit noch geringerer Permeabilität zeigt.

Bemerkenswerth ist noch, daß, wie K. Zickler[1]) nachgewiesen hat, zwischen der Lage der Magnetisirungscurve und dem Kohlenstoffgehalte der Eisen- und Stahlsorten ein gewisser Zusammenhang besteht.

Magnetische Rückstände. Wenn der einen Eisenstab magnetisirende 75
Strom zu wirken aufhört, kehrt der Eisenstab, wenn er auch ursprünglich ganz unmagnetisch war, bekanntlich nicht mehr vollkommen in diesen Zustand zurück, sondern behält einen magnetischen Rückstand, d. h. ein, gleichwohl kleines, „permanentes" magnetisches Moment.

Ich habe (1863) gefunden, daß der magnetische Rückstand bei plötzlicher Stromunterbrechung viel kleiner ausfällt, als wenn man den Strom allmählich bis auf Null abnehmen läßt, und daß im ersteren Falle manchmal sogar negative magnetische Rückstände auftreten, also anomale Magnetisirungen stattfinden.

Diese Erscheinungen lassen sich auch ganz ungezwungen und einfach aus der Hypothese drehbarer Molecularmagnete erklären[2]), sowie auch die auf magnetischen Rückständen beruhenden Erscheinungen, von denen im Nachstehenden die Rede sein soll.

Hysteresis. Wird eine aufsteigende Magnetisirung, z. B. die durch die 76
Magnetisirungscurve OM in Fig. 5 (a. f. S.) dargestellte, rückgängig gemacht, indem man die magnetisirende Feldstärke H (in der Fig. 5 als Abscisse angenommen) allmählich wieder abnehmen läßt, so ergeben sich für die Magnetisirungen, als deren Maß man hier die in Formel 188 definirte Größe $B = 4\pi s + H$. (in der Fig. 5 als Ordinate aufgetragen) anzunehmen pflegt[3]), nicht mehr die-

kaum ersichtlich ist. Ich habe die Versuche später (1879) auch auf Proben feinpulverigen, im Wasserstoffstrome reducirten chemisch reinen Eisens ausgedehnt, die ein ähnliches Verhalten zeigten. Die Versuche mit den Eisenfeilspähnen enthält die zweite Abhandlung meiner Electromagnetischen Untersuchungen, Sitzungsber. der Wiener Academie, Bd. 61 (1870), S. 786. Die Versuche mit den Eisenpulvern finden sich in meiner Abhandlung: Ueber das magnetische Verhalten des pulverförmigen Eisens. Sitzungsber. der Wiener Academie, Bd. 79 (1879), S. 268.

[1]) In der Abhandlung: Ueber die Magnetisirungscurve bei verschiedenen Eisen- und Stahlsorten u. s. w., Centralblatt für Electrotechnik, Bd. 8 (1886), S. 522.

[2]) Die anomale Magnetisirung beruht auf der moleculären Beschaffenheit des Eisens (Richtkraft und Reibung der Molecüle) und kann nicht, wie man es wohl versucht hat, auf magnetisirende Wirkungen von Unterbrechungsextraströmen oder Foucault'schen Strömen zurückgeführt werden. Näheres hierüber enthielt die zweite Auflage dieses Buches S. 70 u. 71.

[3]) Richtiger wäre es, im Sinne der wohlbegründeten Auffassung von Bosanquet die in Formel 191 definirte Größe $B_0 = 4\pi s$ dafür einzusetzen, die wir

Die physicalische Bedeutung des magnetischen Kreisprocesses ist zuerst von Warburg[1]) erkannt und nachgewiesen worden, daß nämlich der von den Magnetisirungscurven MRM' und $M'SM$ eingeschlossene Flächenraum ein Maß der beim cyclischen Hin- und Hermagnetisiren, d. h. bei der Hervorrufung der durch die geschlossene Curve $MRM'SM$ bezeichneten magnetischen Zustandsänderungen, aufgewendeten Arbeit ist.

Um dies einzusehen, erwäge man Folgendes. Eine nähere Ueberlegung der bei der beschriebenen cyclischen Magnetisirung stattfindenden Vorgänge läßt zunächst erkennen, daß bei gleichen Vorzeichen von dB und H Arbeit aufgewendet und bei entgegengesetzten Vorzeichen von dB und H Arbeit gewonnen wird. Dabei ist ein Wachsen von B im negativen Sinne als Abnahme von B und eine Abnahme negativer Werthe von B als Zunahme von B anzusehen.

Es wird nämlich die durch die Zunahme der Kraftlinienzahl B in der Magnetisirungsspirale inducirte electromotorische Kraft e dem magnetisirenden Strom i bei positivem H entgegengesetzt und bei negativem H gleichgerichtet, im ersten Falle also ein negatives und im zweiten Falle ein positives ie gegeben sein. Bei Abnahme der Kraftlinienzahl B hingegen sind e und i bei positivem H gleichgerichtet und bei negativem H entgegengesetzt, wie aus bekannten Inductionsregeln hervorgeht.

Demnach ergibt sich für den Uebergang aus dem Zustande M in den Zustand D (negative dB bei positivem H) gewonnene und für den Uebergang aus dem Zustande D über R in den Zustand M (negative dB bei negativem H) verlorene Arbeit. Dann wieder auf dem Wege von M' nach D' (positive dB bei negativem H) gewonnene und auf dem Wege von D' über S nach M (positive dB bei positivem H) verlorene Arbeit.

Um diese Arbeitswerthe zu finden, berechnen wir zunächst die vorhin erwähnte electromotorische Kraft für eine einzige Windung der Magnetisirungsspirale. Ist q der Querschnitt des Eisenkernes, also qB die Gesammtzahl der in dem Eisenkerne durch die Magnetisirung hervorgerufenen Kraftlinien in einem bestimmten Augenblicke, dann wird nach einem Zeitelemente dt diese Kraftlinienzahl wegen der vorausgesetzten Veränderlichkeit des Stromes i um qdB zu- oder abgenommen haben, also auf die Zeiteinheit bezogen um $q \cdot \frac{dB}{dt}$. Dieser Differentialquotient der Kraftlinienzahl qB, mit negativem Vorzeichen genommen, also $-q\frac{dB}{dt}$, stellt dann, nach bekannten Inductionsregeln[1]), die

[1]) Siehe §. 103.

einer Windung inducirte electromotorische Kraft vor[1]). Ist l die Länge der Mittellinie der (geraden oder ringförmigen) Magnetisirungsspirale und m_1 die Anzahl der auf die Längeneinheit kommenden Windungen, also lm_1 deren Gesammtzahl, so ist die electromotorische Gegenkraft in allen Windungen $e = lm_1 q \frac{dB}{dt}$, folglich die von dem veränderlichen magnetisirenden Strome i in einem Zeitelemente dt geleistete Arbeit $dW = iedt = lm_1 q \frac{dB}{dt} idt = lm_1 qidB$. Nun bedeutet lq das Volumen v des von der Magnetisirungsspirale bedeckten Eisenkernes; andererseits ist die Feldstärke in der Magnetisirungsspirale (nach Formel 186) $H = 4\pi m_1 i$, folglich $m_1 i = \frac{H}{4\pi}$. Demnach geht der Ausdruck für dW über in $dW = \frac{v}{4\pi} HdB$. Also ist die bei einer endlichen magnetischen Zustandsänderung, bei der B aus B_1 in B_2 übergeht, aufgewendete Magnetisirungsarbeit

$$W = \frac{v}{4\pi} \int_{B_1}^{B_2} HdB \quad \ldots\ldots\ldots \quad 203)$$

oder für die Volumseinheit

$$W_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{B_1}^{B_2} HdB \quad \ldots\ldots\ldots \quad 204)$$

Ein Integralelement HdB ist in der Fig. 5 durch das Flächenelement df angedeutet[2]). Die Summirung dieser Flächenelemente (Integration) für den Theil $D'SM$ der Hysteresiscurve gibt das Flächenstück $D'SMND'$, das, durch 4π dividirt, die vorhin erwähnte, bei den diesem Curvenstücke entsprechenden magnetischen Zustandsänderungen aufgewendete Magnetisirungsarbeit in der Volumseinheit des Eisens vorstellt. Dagegen gibt die Integration von HdB längs des Curvenstückes DM die Fläche DMN, die, durch 4π dividirt,

---

[1]) Das negative Vorzeichen in dem Ausdrucke der inducirten electromotorischen Kraft $e = -q \frac{dB}{dt}$ bedeutet, daß eine Zunahme dB der Kraftlinienzahl B eine electromotorische Kraft inducirt, die einem die Kraftlinien B verstärkenden Strom i entgegenwirkt.

[2]) Es werden nämlich bei dieser Integration die B als Abscissen und die H als Ordinaten angesehen. Man könnte auch vom Integral $\int BdH$ ausgehen (siehe Wittler I, S. 42). Das Integral $\int HdB$ hat man wohl auch mit dem Integral $\int pdv$ verglichen, das bei einem Indicator-Diagramm in Betracht kommt, indem man dabei H als Analogon von p und B als Analogon von v ansieht. (Silv. P. Thompson.)

Die physicalische Bedeutung des magnetischen Kreisprocesses ist zuerst von Warburg[1]) erkannt und nachgewiesen worden, daß nämlich der von den Magnetisirungscurven MRM' und $M'SM$ eingeschlossene Flächenraum ein Maß der beim cyclischen Hin- und Hermagnetisiren, d. h. bei der Hervorrufung der durch die geschlossene Curve $MRM'SM$ bezeichneten magnetischen Zustandsänderungen, aufgewendeten Arbeit ist.

Um dies einzusehen, erwäge man Folgendes. Eine nähere Ueberlegung der bei der beschriebenen cyclischen Magnetisirung stattfindenden Vorgänge läßt zunächst erkennen, daß bei gleichen Vorzeichen von dB und H Arbeit aufgewendet und bei entgegengesetzten Vorzeichen von dB und H Arbeit gewonnen wird. Dabei ist ein Wachsen von B im negativen Sinne als Abnahme von B und eine Abnahme negativer Werthe von B als Zunahme von B anzusehen.

Es wird nämlich die durch die Zunahme der Kraftlinienzahl B in der Magnetisirungsspirale inducirte electromotorische Kraft e dem magnetisirenden Strom i bei positivem H entgegengesetzt und bei negativem H gleichgerichtet, im ersten Falle also ein negatives und im zweiten Falle ein positives ie gegeben sein. Bei Abnahme der Kraftlinienzahl B hingegen sind e und i bei positivem H gleichgerichtet und bei negativem H entgegengesetzt, wie aus bekannten Inductionsregeln hervorgeht.

Demnach ergibt sich für den Uebergang aus dem Zustande M in den Zustand D (negative dB bei positivem H) gewonnene und für den Uebergang aus dem Zustande D über R in den Zustand M (negative dB bei negativem H) verlorene Arbeit. Dann wieder auf dem Wege von M' nach D' (positive dB bei negativem H) gewonnene und auf dem Wege von D' über S nach M (positive dB bei positivem H) verlorene Arbeit.

Um diese Arbeitswerthe zu finden, berechnen wir zunächst die vorhin erwähnte electromotorische Kraft für eine einzige Windung der Magnetisirungsspirale. Ist q der Querschnitt des Eisenkernes, also qB die Gesammtzahl der in dem Eisenkerne durch die Magnetisirung hervorgerufenen Kraftlinien in einem bestimmten Augenblicke, dann wird nach einem Zeitelemente dt diese Kraftlinienzahl wegen der vorausgesetzten Veränderlichkeit des Stromes i um $q\frac{\partial B}{\partial t}dt$ zu- oder abgenommen haben, also auf die Zeiteinheit bezogen um $q\cdot\frac{dB}{dt}$. Dieser Differentialquotient der Kraftlinienzahl qB, mit negativem Vorzeichen genommen, also $-q\frac{\partial B}{\partial t}$, stellt dann, nach bekannten Inductionsregeln[1]), die

[1]) Siehe §. 108.

einer Windung inducirte electromotorische Kraft vor[1]). Ist l die Länge der Mittellinie der (geraden oder ringförmigen) Magnetisirungsspirale und m_1 die Anzahl der auf die Längeneinheit kommenden Windungen, also lm_1 deren Gesammtzahl, so ist die electromotorische Gegenkraft in allen Windungen $e = lm_1 q \frac{dB}{dt}$, folglich die von dem veränderlichen magnetisirenden Strome i in einem Zeitelemente dt geleistete Arbeit $dW = iedt = lm_1 q \frac{dB}{dt} idt = lm_1 qidB$. Nun bedeutet lq das Volumen v des von der Magnetisirungsspirale bedeckten Eisenkernes; andererseits ist die Feldstärke in der Magnetisirungsspirale (nach Formel 186) $H = 4\pi m_1 i$, folglich $m_1 i = \frac{H}{4\pi}$. Demnach geht der Ausdruck für dW über in $dW = \frac{v}{4\pi} HdB$. Also ist die bei einer endlichen magnetischen Zustandsänderung, bei der B aus B_1 in B_2 übergeht, aufgewendete Magnetisirungsarbeit

$$W = \frac{v}{4\pi} \int_{B_1}^{B_2} HdB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 203)$$

oder für die Volumseinheit

$$W_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{B_1}^{B_2} HdB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 204)$$

Ein Integralelement HdB ist in der Fig. 5 durch das Flächenelement df angedeutet[2]). Die Summirung dieser Flächenelemente (Integration) für den Theil $D'SM$ der Hysteresiscurve gibt das Flächenstück $D'SMND'$, das, durch 4π dividirt, die vorhin erwähnte, bei den diesem Curvenstücke entsprechenden magnetischen Zustandsänderungen aufgewendete Magnetisirungsarbeit in der Volumseinheit des Eisens vorstellt. Dagegen gibt die Integration von HdB längs des Curvenstückes DM die Fläche DMN, die, durch 4π dividirt,

---

[1]) Das negative Vorzeichen in dem Ausdrucke der inducirten electromotorischen Kraft $e = -q \frac{dB}{dt}$ bedeutet, daß eine Zunahme dB der Kraftlinienzahl B eine electromotorische Kraft inducirt, die einem die Kraftlinien B verstärkenden Strom i entgegenwirkt.

[2]) Es werden nämlich bei dieser Integration die B als Abscissen und die H als Ordinaten angesehen. Man könnte auch vom Integral $\int BdH$ ausgehen (siehe Kittler I, S. 42). Das Integral $\int HdB$ hat man wohl auch mit dem Integral $\int pdv$ verglichen, das bei einem Indicator-Diagramm in Betracht kommt, indem man dabei H als Analogon von p und B als Analogon von v ansieht. (Silv. P. Thompson.)

die bei den durch das Curvenstück DM bezeichneten Zustandsänderungen gewonnene Arbeit darstellt. Die Differenz der Flächenräume $NMSD'N - NMD = DMSD'D$ getheilt durch 4π gibt also die Magnetisirungsarbeit für den mit positiven Werthen von H ausgeführten Theil des magnetischen Kreisprocesses an.

Durch ähnliche Betrachtungen findet man, daß $\frac{DRM'N'D - D'M'N'}{4\pi}$ die Magnetisirungsarbeit für den mit negativen Werthen von H ausgeführten Theil des magnetischen Kreisprocesses angibt.

Demnach bedeutet die ganze durch 4π getheilte Hysteresisfläche, nämlich $\frac{area\ MDRM'D'SM}{4\pi} = \frac{\int HdB}{4\pi}$, die in der Volumseinheit des Eisens während des magnetischen Kreisprocesses aufgewendete Magnetisirungsarbeit.

Hat man die bei der Ausführung eines magnetischen Kreisprocesses beobachteten zusammengehörigen Werthe von H und B in ein Coordinatensystem eingetragen und auf diese Art die von der ab- und aufsteigenden Magnetisirungscurve ($MDRM'$ und $M'D'SM$ in Fig. 5) gebildete Hysteresisschleife erhalten, so läßt sich die beim magnetischen Kreisprocesse in der Volumseinheit des Eisens aufgewendete Magnetisirungsarbeit auf folgende Art ermitteln.

Nehmen wir an, der Zeichnungsmaßstab sei so gewählt, daß $H = 1$ durch eine Strecke von h cm und $B = 1$ durch eine Strecke von b cm dargestellt sei, — dann ist, wenn die z. B. mit dem Planimeter gemessene Hysteresisfläche f cm^2 beträgt, die gesuchte Arbeit W_1 in Erg

$$W_1 = \frac{f}{4\pi hb} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 205)$$

Wäre z. B. bei einer Zeichnung, wie Fig. 5, $h = 2{,}6 \times 10^{-1}$ cm; $b = 2{,}6 \times 10^{-4}$ cm und $f = 7$ cm^2, so ergäbe sich

$$W_1 = \frac{7}{4\pi \times 6{,}76 \times 10^{-5}} = 8245 \text{ Erg}$$

für 1 cm^3 Eisen. Für praktische Zwecke wird man solche Zeichnungen natürlich in einem viel größeren Maßstabe ausführen.

Da $B = 4\pi s$, also $dB = 4\pi ds$, kann man anstatt $\frac{1}{4\pi}\int HdB$ auch schreiben $\int Hds$, oder, wenn man den specifischen Magnetismus s, wie es sehr gebräuchlich ist, mit I bezeichnet,

$$W_1 = \frac{1}{4\pi}\int HdB = \int HdI \quad \ldots\ldots \quad 206)$$

als Ausdruck für die cyclische Magnetisirungsarbeit in der Volumseinheit.

Wir haben bis jetzt nur einen einzelnen magnetischen Kreisproceß betrachtet, wie man ihn allenfalls durch einen Gleichstrom, den man mittelst Rheostat und Commutator innerhalb zweier Grenzwerthe $+\bar{i}$, $-\bar{i}$ und dann wieder $+\bar{i}$ stetig (und wegen der vorzunehmenden Messungen von H und B langsam) variiren läßt, hervorrufen kann. Wir müssen aber auch den Fall betrachten, daß eine Eisenmasse der magnetisirenden Wirkung von Wechselströmen unterliegt und in Folge dessen in rascher Aufeinanderfolge eine große Zahl von magnetischen Kreisprocessen durchzumachen hat.

Der durch Hysteresis verursachte Aufwand an Magnetisirungsarbeit hat eben vornehmlich deßhalb practische Wichtigkeit, weil er in den Eisenmassen der beim Wechselstrombetriebe verwendeten Transformatoren wegen der großen Periodenzahl der gebräuchlichen Wechselströme nicht unbedeutende Effectverluste mit sich bringt, wie eine weitere Ausführung des (auf einem Versuche beruhenden) Beispieles zu Formel 205 wohl beurtheilen läßt.

Beträgt die Hysteresisarbeit für eine cyclische Magnetisirung $8245 \frac{\text{Erg}}{\text{cm}^3}$, so ergibt sich beim Betriebe eines Transformators mit einem Wechselstrome von 40 Perioden in der Secunde ein Effectverbrauch von $8245 \times 40 = 329\,800 \frac{\text{Secundenerg}}{\text{cm}^3}$. Ist ferner z. B. $12\,000\ \text{cm}^3$ das Volumen der Eisenmasse des Transformatorkernes, so beträgt der Effectverbrauch für die in diesem Transformator zu leistende Magnetisirungsarbeit $329\,800 \times 12\,000 = 39\,576 \,.\, 10^5$ Secundenerg, also nahezu 396 Watt, d. i. mehr als eine halbe Pferdestärke.

Dabei ist immer vorausgesetzt worden, daß der magnetische Kreisproceß mit dem untersuchten Eisen innerhalb der Grenzen $B = +14\,000$ und $B = -14\,000$ ausgeführt worden ist.

Die Grenzwerthe der Magnetisirung, die wir allgemein mit $+\bar{B}$ und $-\bar{B}$ bezeichnen wollen, sind nämlich für einen magnetischen Kreisproceß in analoger Weise maßgebend, wie die Grenztemperaturen für einen calorischen Kreisproceß [1]).

In der That hat Ch. P. Steinmetz nachgewiesen, daß die bei einer cyclischen Magnetisirung in $1\ \text{cm}^3$ aufgewendete Arbeit in Erg als eine sehr einfache Function von $\bar{B}$ in folgender Weise ausgedrückt werden kann:

$$W_1 = \eta\, \bar{B}^{1,6} \frac{\text{Erg}}{\text{cm}^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 207)\ ^{2)}$$

---

[1]) Grundriß der mechanischen Physik, S. 235 bis 238 und 351 bis 352.

[2]) Fleming, Alternate Current Transformers, II., S. 491; Kittler, Handbuch der Electrotechnik, I., S. 43; Kapp, Transformatoren (1895), S. 15 u. s. w.

wobei η eine für gewöhnliche Transformatorkerne zwischen 0,002 und 0,005 liegende Materialconstante ist und stets vorausgesetzt wird, daß der Kreisproceß zwischen $+\overline{B}$ und $-\overline{B}$, d. h. zwischen numerisch gleichgroßen entgegengesetzten magnetischen Grenzwerthen stattfindet, wie es ja auch die Anwendung sinusförmiger Wechselströme mit sich bringt.

Bezeichnet man mit n die secundliche Periodenzahl dieser Wechselströme, so erhält man für die zur Magnetisirung erforderliche Arbeitsstärke in $\frac{\text{Watt}}{\text{cm}^3}$

$$h_1 = \frac{n\eta\,\overline{B}^{1,6}}{10^7}\,\frac{\text{Watt}}{\text{cm}^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 208)$$

Hieraus ergibt sich für das Eisenvolumen v_1, zu dessen secundlich n maliger cyclischer Magnetisirung zwischen $+\overline{B}$ und $-\overline{B}$ gerade ein Watt erforderlich ist,

$$v_1 = \frac{10^7}{n\eta\,\overline{B}^{1,6}}\,\frac{\text{cm}^3}{\text{Watt}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 209)$$

Die nachstehende, aus dem bereits citirten Buche von Ewing entnommene Tabelle, beruhend auf Versuchen mit einem weichen Eisendrahte, enthält zusammengehörige Werthe von $\pm\overline{B}$ und $W_1 = \int H dI$, denen ich noch die Werthe $\overline{B}^{1,6}$ beigefügt habe[1]).

$\pm\overline{B}$	$\int H dI$	$\overline{B}^{1,6}$	$\pm\overline{B}$	$\int H dI$	$\overline{B}^{1,6}$
2 000	420	240 800	9 000	4200	2 122 000
3 000	800	365 900	10 000	5000	2 512 000
4 000	1230	579 800	11 000	5820	2 926 000
5 000	1700	828 600	12 000	6720	3 363 000
6 000	2200	1 097 700	13 000	7650	3 822 000
7 000	2760	1 419 000	14 000	8650	4 303 000
8 000	3450	1 758 000	15 000	9670	4 805 500

Für $\eta = 0{,}003$ und $n = 40$ erhält man z. B. mittelst der Formel 208 die nachstehenden zusammengehörigen Werthe:

— Der Coefficient η ist für sehr weiches Eisen = 0,002; für gutes dünnblätteriges Eisen = 0,003; für ordinärstes Blättereisen = 0,004; für ordinärste Transformatorkerne = 0,0045; für Gußeisen = 0,0162; für harten Gußstahl = 0,025.

[1]) Die hier angeführten Werthe von B haben die Bedeutung $B = 4\pi s + H$ und müßten also durch Abzug der zugehörigen Werthe von H auf die von der Magnetisirung (s) des Eisens herrührenden Bosanquet'schen Werthe von B reducirt werden. Doch sind die H verhältnißmäßig klein, da man ja z. B. mit $H = 10$ in schwedischem Schmiedeeisen schon nahezu $B = 14000$ erreichen kann. (Magnetisirungscurven in Uppenborn's Kalender 1894.)

$\overline{B}$	$\frac{\text{Watt}}{\text{cm}^3}$	$\frac{\text{cm}^3}{\text{Watt}}$	$\frac{\text{Watt}}{\text{g}}$	$\frac{\text{g}}{\text{Watt}}$
6000	0,013	77	0,001 67	599
7000	0,017	59	0,002 18	458
8000	0,021	48	0,002 68	373
9000	0,025	40	0,003 21	311

Dagegen würde man z. B. aus der für $B = 6000$ angeführten Ewing'schen Zahl für einen einmaligen Kreisproceß, nämlich aus $\int HdI = 2200 \frac{\text{Erg}}{\text{cm}^3}$ erhalten haben: $\frac{2200 \times 40}{10^7} = 0{,}0088 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^3}$, woraus hervorgeht, daß man für das von Ewing benutzte Eisen $\eta = \frac{0{,}003 \times 0{,}0088}{0{,}013} = 0{,}0023$ einzusetzen hätte, was mit der Thatsache übereinstimmt, daß Ewing bei den angeführten Versuchen sehr weiches Eisen benutzt hatte.

Es mögen noch einige Beispiele folgen.

Berechnung der Temperaturerhöhung ϑ durch die bei einem einmaligen magnetischen Kreisprocesse entwickelte Wärme. Dabei kommt in Rechnung das Arbeitsäquivalent einer Grammcalorie in Erg $\mathsf{E} = 4{,}19 \times 10^7$, das specifische Gewicht des Eisens $= 7{,}78$ und die specifische Wärme des Eisens $= 0{,}11$; man erhält dann in Celsiusgraden $\vartheta = \frac{\int HdI}{4{,}19 \times 10^7 \times 7{,}78 \times 0{,}11}$. Demnach werden $\frac{1}{\vartheta} = \frac{4{,}19 \times 10^7 \times 7{,}78 \times 0{,}11}{\int HdI}$ Kreisprocesse erforderlich sein, um eine Erwärmung um 1^0 C. herbeizuführen. Wird sehr weiches Eisen vorausgesetzt, so kann man den Werth von $\int HdI$ aus der vorstehenden Tabelle von Ewing entnehmen und erhält für eine zwischen $\overline{B} = +8000$ und $\overline{B} = -8000$ ausgeführte cyclische Magnetisirung $\int HdI = 3450$, also $\frac{1}{\vartheta} = 10\,392$. Hierzu würden also bei einem Wechselstrom von 40 Perioden in der Secunde $4^1/_3$ Minuten erforderlich sein.

Für die Magnetisirungsarbeit a in Meterkilogrammen, die erforderlich ist, um eine Tonne Eisen einem magnetischen Kreisprocesse zu unterwerfen, erhält man

$$a = \frac{10^6 \int HdI}{9{,}81 \times 10^7 \times 7{,}78} = 0{,}001\,31 \int HdI.$$

Diese Arbeit beträgt also bei sehr weichem Eisen für eine einmalige Hin-

und Hermagnetisirung zwischen $\overline{B} = +\,10000$ und $\overline{B} = -\,10000$ (wofür $\int H dI = 5000$) $0{,}00131 \times 5000 = 6{,}55$ mkg.

Für die Anzahl w der Watt, die beansprucht werden, um 1 Kilogramm Eisen in jeder Secunde 40 mal einen bestimmten magnetischen Proceß durchmachen zu lassen, ergibt sich

$$w = \frac{40 \times 1000 \int H dI}{10^7 \times 7{,}78} = 0{,}000519 \int H dI.$$

Denkt man sich also z. B. den 100 kg schweren Eisenkern eines Transformators 40 mal in der Secunde einem magnetischen Kreisprocesse unterworfen, bei dem + 8000 und — 8000 die Grenzwerthe der Magnetisirung sind, so erhält man nach der Tabelle $\int H dI = 3450$ Erg, folglich

$$w = 0{,}000519 \times 100 \times 3450 = 179 \text{ Watt.}$$

Dies gilt für weiches Eisen, auf das sich die von Ewing für $\int H dI$ gefundenen Zahlen beziehen. Für $\eta = 0{,}003$ (gutes dünnblätteriges Eisen) würde die Formel von Steinmetz $w = 274$ Watt geben. Diese Berechnungen setzen jedoch die Unabhängigkeit des Werthes von $\int H dI$ von der Schnelligkeit, mit der die Kreisprocesse ausgeführt werden, voraus; eine noch nicht erledigte Frage[1]), deren Erörterung uns hier zu weit führen würde.

Zum besseren Verständnisse mag noch ein sehr einfaches Beispiel von Hysteresis angeführt werden.

Wir nähern einen unmagnetischen Eisenstab einem kräftigen Magnetpole und verspüren in der Hand die Kraft, mit der der Stab gegen den Magnetpol hingezogen wird. Bei der Annäherung an den Pol wird also von der magnetischen Zugkraft Arbeit verrichtet. Ziehen wir sodann den Eisenstab vom Magnetpole wieder zurück, so müssen wir Arbeit aufwenden, um die magnetische Zugkraft zu überwinden und zwar eine größere Arbeit, als die vorhin bei der Annäherung von der Zugkraft geleistete, denn der Eisenstab hat bleibenden Magnetismus angenommen und wird also auf dem Rückwege vom Magnetpole bei einer gewissen Entfernung stärker angezogen, als es auf dem Hinwege bei gleicher Entfernung der Fall war. Die aufgewendete Arbeit ist also auch hier größer als die gewonnene, was nicht der Fall wäre, wenn der Eisenstab bei seiner Entfernung vom Magnetpole wieder genau in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrte, d. h. wenn er auf dem Rückwege genau dieselben Zustandsänderungen in umgekehrter Reihenfolge durchmachte, wie auf dem Hinwege, so, daß die die Wege dieser Zustandsänderungen darstellenden Curven zusammenfielen.

---

[1]) J. A. Ewing, Magnetic induction u. s. w., S. 108, §. 88.

Um eine Eisensorte auf Hysteresis zu prüfen, bieten sich uns drei Wege dar, da wir entweder mit einem Magnetometer oder mit einem ballistischen Galvanometer die Magnetisirungen messen, oder endlich durch Effectmessung mit dem Wattmeter, wenngleich nur bedingungsweise und weniger genau, den Zweck erreichen können. Bei den beiden ersten Methoden wird das nach Formel 206 kurz beschriebene Gleichstromverfahren angewendet. Hat man dabei ein Magnetometer zur Verfügung, so kann man die in dem untersuchten Eisenstabe durch die aufeinanderfolgenden Stromstärken hervorgerufenen magnetischen Momente ermitteln und daraus nach bekannten Formeln (§. 26) die Kraftlinienzahl B annähernd berechnen, während H stets durch Formel 186 gegeben ist [1]).

Genauer ist die ballistische Methode. Sie wird an einem Ringmagnet ausgeführt, dessen Kern aus dem zu untersuchenden Eisen angefertigt ist. Um die diesen Kern bedeckende Magnetisirungsspirale sind einige Windungen eines dünnen Drahtes gelegt, dessen Enden mit den Klemmen des ballistischen Galvanometers [eines Galvanometers von großer Schwingungsdauer (§. 94)] leitend verbunden sind, während ein anderes Galvanometer zur Messung des magnetisirenden Stromes dient. Wird dieser und somit auch H mittelst des Rheostaten [2]) um einen gewissen Betrag ΔH verändert, so bewirkt die dadurch verursachte Aenderung ΔB der im Eisenkerne vorhandenen Kraftliniendichte einen Inductionsstrom von sehr kurzer Dauer („Inductionsstoß") in der Leitung des ballistischen Galvanometers, aus dessen Ausschlag das jedem ΔH entsprechende ΔB sofort berechnet werden kann. Es wäre zu weitläufig, die auf solche Art ermöglichte und nach dem Gesagten wohl verständliche Construction der gesuchten Hysteresiscurve ausführlich zu erörtern.

Hinsichtlich der dritten Methode sei Folgendes bemerkt. Ein Wechselstrom bewirkt in einem Ringmagnet dreierlei Effecte, nämlich in der Magnetisirungsspirale die Stromwärme und im Eisenkern einerseits die Erzeugung von

---

[1]) Diese experimentelle Anordnung ist jener ähnlich, die ich bei meinen electromagnetischen Untersuchungen (insbesondere über die Müller'sche Magnetisirungsformel) benutzt habe und zwar (im Gegensatze zum Vorgange Müller's und Anderer) in der Art, daß der magnetisirende Strom während der ganzen Versuchsreihe nie unterbrochen wurde und daß die Wirkung der Magnetisirungsspirale auf das Magnetometer (in einer dem Weber'schen Verfahren ähnlichen Weise) durch Compensation eliminirt war. (Sitzungsberichte der Wiener Academie 1862 bis 1870.)

[2]) Anstatt eines eigentlichen Rheostaten kann man sich hier mit Vortheil eines von Prof. Dr. A. F. Weinhold in Chemnitz construirten Apparates bedienen, der es ermöglicht, den Strom einer Gleichstromquelle (Batterie) in einen Wechselstrome von beliebig langer Periode (die Periode einer Kurbelumdrehung entsprechend) zu verwandeln. Der Apparat war ursprünglich dazu eingerichtet, die zur Erzeugung eines zweiphasigen magnetischen Drehfeldes erforderlichen Wechselströme zu liefern, wurde aber im Wiener electrotechnischen Institute von Dr. Reithoffer auch zu Hysteresisversuchen vortheilhaft verwendet.

Wirbelströmen und andererseits die Magnetisirungsarbeit. Mißt man diesen Gesammteffect mit dem Wattmeter, bringt man den leicht zu berechnenden Stromwärmeeffect davon in Abzug und kann man, falls man es nämlich mit einem hinreichend zertheilten Eisenkern zu thun hat, von dem Effectverlust für Wirbelströme [1]) absehen, so gibt uns das Wattmeter den gesuchten Hysteresiseffect.

Picou hat für derartige Untersuchungen eine Magnetisirungsspirale (Solenoid) angewendet, in das die zu prüfenden Eisensorten in Form von gleich dimensionirten Stäben eingeführt wurden. Die Nebenspule des Wattmeters ist mit den Klemmen des Solenoides verbunden; dieses selbst, die Hauptspule des Wattmeters, ein strommessendes Dynamometer und ein Regulirwiderstand sind im Hauptstromkreise hinter einander geschaltet. (Kittler II, 288.)

Die Kenntniß des Hysteresiseffectes für eine bestimmte Eisensorte findet bei der Berechnung der Transformatoren eine Anwendung. Ein Beispiel mag dies erläutern.

Es sei ein Transformator von der Leistung $P = 7500$ Watt zu berechnen. Für die entsprechende maximale Kraftliniendichte habe man $\overline{B} = 7300$ festgesetzt [2]); ferner sei der Hysteresisverlust h im Eisenkerne auf $p = 3$ Proc., also auf $h = P\frac{p}{100} = 225$ Watt veranschlagt; die Periodenzahl des verwendeten Wechselstromes sei $n = 40$ und die mit der zu verwendenden Eisensorte gemachten Hysteresisversuche hätten mit Hilfe der Steinmetz'schen Formel (207) $\eta = 0{,}003$ ergeben, dann erhält man mit Hilfe der Formel 209 das gesuchte Volumen

$$v = 225 \cdot \frac{10^7}{0{,}12 \times 7300^{1{,}6}} = 12\,350 \text{ cm}^3$$

für den Eisenkern, woraus sich dann für die gewählte Type und mit Rücksicht auf Blätterdicke und Zwischenlagen auch die Dimensionen des Kernes ergeben.

77 **Magnetischer Widerstand.** Die Magnetisirung ist, wie wir wissen, eine Arbeitsleistung [3]). Wir können aber diese Thatsache auch ausdrücken, indem

---

[1]) Zur Berechnung des Wirbelstromeffectes o gibt Uppenborn (Kalender 1902, II., S. 153) den Ausdruck

$$o = 1400 \,.\, 10^{-16}\, \delta^2 n^2 B^2 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^3} \quad \ldots \ldots \quad 210)$$

wobei δ die Dicke der Eisenbleche in Millimetern bedeutet.

[2]) Ueber die gebräuchliche maximale Liniendichte enthält der Schlußsatz des §. 118 eine hier in Betracht kommende Bemerkung.

[3]) Die Magnetisirungsarbeit wird geleistet bei der Drehung der magnetischen Molecüle entgegen ihrer Richtkraft und Reibung. Die Magnetisirung wäre auch eine Arbeit, wenn das Eisen keine Coërcitivkraft hätte, d. h. wenn keine moleculare

wir sagen, daß die magnetisirende Kraft bei der Magnetisirung einen Widerstand zu überwinden habe, den wir nun auch genauer definiren wollen.

Wir denken uns die Drahtbewickelung eines Ringmagneten zunächst ohne Eisenkern. Dann ist die Dichte der Kraftlinien im Inneren dieser Spirale (nach Formel 186) $H = 4\pi m_1 i$. Enthält aber die Spirale einen Eisenkern, den wir uns vorerst als einen geschlossenen Ring denken, so steigt die Zahl der Kraftlinien (nach Formel 187) auf $B = \mu H = 4\pi\mu m_1 i$. Ist q die Querschnittsfläche des die Drahtbewickelung ausfüllenden Eisenkernes, dann ist die Gesammtzahl der Kraftlinien im Ringe $Z = Bq = 4\pi\mu q m_1 i$. Setzt man für m_1 dessen Werth $\frac{m}{l}$ ein, wobei m die Windungszahl der Drahtbewickelung und l die Länge der Mittellinie des Ringes ist, so läßt sich der Ausdruck für Z auf die Form bringen

$$Z = \frac{4\pi m i}{\frac{l}{\mu q}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 211)$$

oder wenn man die Stromstärke $J = 10\,i$ in Ampère einführt

$$Z = \frac{\frac{4\pi}{10} \cdot mJ}{\frac{l}{\mu q}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 212)$$

Der Nenner dieses Ausdruckes hat dieselbe Form, wie der Ausdruck für den electrischen Leitungswiderstand eines cylindrischen oder prismatischen Leiters von der Länge l, vom Querschnitte q und vom specifischen Leitungsvermögen μ $\left(\text{oder vom specifischen Leitungswiderstande } \frac{1}{\mu}\right)$.

Der Zähler ist proportional der den Magnetismus erregenden Kraft (mJ Ampère-Windungen) und der ganze Ausdruck ist analog dem Ausdrucke des Ohm'schen Gesetzes, wobei die Kraftlinienzahl Z an die Stelle der durch das Ohm'sche Gesetz ausgedrückten Stromstärke getreten ist. Dem entsprechend hat man also auch den Zähler $\frac{4\pi}{10} \cdot mJ$ die magnetomotorische Kraft der Stromspirale und den Nenner $\frac{l}{\mu q}$ den magnetischen Widerstand des Eisen-

Reibung vorhanden wäre. Doch würde in diesem Falle bei einem magnetischen Kreisprocesse die aufgewendete Arbeit durch die wiedergewonnene compensirt werden ($\int H dI = 0$) und die Hysteresisfläche verschwinden. Die von W. Weber (electrodynamische Maßbestimmungen, Diamagnetismus) in Betracht gezogene „Directionskraft" (Richtkraft) der Molecüle wächst mit der Drehung, was der abnehmenden Permeabilität entspricht.

kernes genannt, dessen magnetische Permeabilität μ man also als dessen magnetische Leitungsfähigkeit aufzufassen hätte, oder

$$\varrho = \frac{1}{\mu} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 213)$$

als den specifischen magnetischen Widerstand.

Die Curve II der Fig. 3 zeigt den Verlauf der specifischen Widerstände für dieselbe Rowland'sche Versuchsreihe, auf die sich die Permeabilitätscurve I dieser Figur bezieht. Dabei ist jedoch zu bemerken, daß in der Widerstandscurve II die millionfachen Werthe der specifischen Widerstände $\frac{1}{\mu} = \varrho$, also die Werthe $\frac{10^6}{\mu} = 10^6 \varrho$ als Ordinaten (für die als Abscissen angenommenen B) aufgetragen sind. Mit Beibehaltung des für die Permeabilitätswerthe gewählten Maßstabes (etwa 20 mm = 1000) würde nämlich die Widerstandscurve auch bei den größten Werthen von $\frac{1}{\mu}$ keine sichtbare Erhebung über die Abscissenaxe zeigen.

Man darf übrigens nicht übersehen, daß die hervorgehobene Analogie zwischen dem Ausdrucke 211 für den sogenannten Kraftlinienfluß Z und dem Ohm'schen Gesetze 98 für den electrischen Strom mehr auf der Aehnlichkeit der mathematischen Ausdrücke als auf einer physicalischen Uebereinstimmung beruht, da hier sehr wesentliche Gegensätze stattfinden. Nur das Entstehen und Verschwinden des Kraftlinienstromes (d. i. des Magnetismus) sind mit Arbeiten (einer negativen und einer positiven) verbunden, nicht aber das Fortbestehen des Kraftlinienstromes (d. i. des magnetischen Zustandes), während ein constanter electrischer Strom i fortwährend Arbeit verrichtet, nämlich in t Secunden die Arbeit $i^2 r . t$ in einem Leiter vom Widerstande r. — Der magnetische Widerstand ändert sich mit der „magnetischen Stromstärke", d. i. mit der Kraftlinienzahl [1]), während der electrische Leitungswiderstand bei constanter Temperatur von der Stromstärke unabhängig ist.

Denken wir uns nun den Ringmagnet geöffnet, so haben wir in den „magnetischen Stromkreis" eine von den Kraftlinien zu durchsetzende Luftschichte („air-gap") eingeschaltet, deren magnetischen Widerstand wir gleichfalls durch einen Ausdruck von der Form $\frac{l}{\mu q}$ darstellen können.

Betrachten wir endlich noch den Fall einer Dynamomaschine, etwa einer zweipoligen, die also nur einen einzigen magnetischen Stromkreis darbietet, so umfaßt dieser magnetische Stromkreis drei Theile: das Electromagneteisen, das Ankereisen und die Luftschichten, die zu beiden Seiten des Ankers den Zwischen-

[1]) Zuerst abnehmend und dann zunehmend, wie Curve II in Fig. 3 zeigt.

raum zwischen den Polschuhen und dem Ankereisen ausfüllen, nebst den anderen in diesen Zwischenräumen befindlichen unmagnetischen Körpern (Kupfer und Isolirmateriale der Ankerbewickelung), die wir bei der Berechnung des magnetischen Widerstandes zwischen den Eisentheilen des magnetischen Stromkreises auch wie Luft behandeln [1]). Der magnetische Widerstand des magnetischen Stromkreises einer Dynamomaschine wird also durch einen dreitheiligen Ausdruck darzustellen sein.

Wir erhalten alsdann für die Gesammtzahl der Kraftlinien auf Grundlage der Formel 212

$$Z = \frac{\frac{4\pi}{10} \cdot mJ}{\frac{l_3}{\mu_3 q_3} + \frac{l_2}{\mu_2 q_2} + \frac{l_1}{\mu_1 q_1}} \quad \ldots\ldots 214)\ ^{2})$$

wobei die Glieder des Nenners der Reihe nach auf Luftschichten (3), Electromagneteisen (2) und Ankereisen (1) sich beziehen.

Multiplicirt man in der Gleichung 212 im Zähler und Nenner mit $\frac{10}{4\pi}$ und setzt man (mit Rücksicht auf 213)

$$\frac{10}{4\pi\mu} = \frac{10}{4\pi}\varrho = \varrho' \quad \ldots\ldots 215)$$

so kann man in 212 $Z = \frac{mJ}{\varrho' \frac{l}{q}}$ und in 214

$$Z = \frac{mJ}{\varrho'_3 \frac{l_3}{q_3} + \varrho'_2 \frac{l_2}{q_2} + \varrho'_1 \frac{l_1}{q_1}} \quad \ldots\ldots 216)$$

schreiben, wobei also die ϱ' (annähernd $= 0{,}8\,\varrho$) specifische Widerstände sind, die sich auf eine $\frac{4\pi}{10}$ mal größere Einheit beziehen, als die natürlichen specifischen Widerstände $\varrho = \frac{1}{\mu}$. Wir wollen diese Einheit die practische nennen, weil man es häufig vorzieht, in dem Ausdrucke für die Kraftlinienzahl Z anstatt der

[1]) Genau richtig ist dies nicht, insofern die Permeabilität des Kupfers größer ist als die der Luft. Vergl. G. Kapp, Electric transmission of energy.

Den nicht aus Eisen bestehenden Theil des magnetischen Kreises (hier zwischen Ankereisen und Polschuhen) nennt man wohl auch das Interferricum. Siehe die Bemerkungen nach Formel 221.

[2]) Die absteigende Reihenfolge der Stellenzeiger in den Theilen des Nenners beruht auf einer später (§. 81, neunte Anmerkung) zur Sprache kommenden Analogie mit der Frölich'schen Formel, während es andererseits üblich ist, den Ankergrößen den Stellenzeiger 1 und den Schenkelgrößen den Stellenzeiger 2 zu geben. (Kittler.)

magnetomotorischen Kraft $\frac{4\pi}{10} m J$ nur die Ampèrewindungen mJ im Zähler zu haben.

Diese „practische Einheit" ist, wie aus der Formel 212 ersichtlich, zu definiren als der magnetische Widerstand, in dem die magnetisirende Kraft einer Ampèrewindung eine Kraftlinie pro Quadratcentimeter erzeugt. Der specifische Widerstand der Luft wäre also, auf diese Einheit bezogen, nicht $= 1$, sondern $= \frac{10}{4\pi}$, also annähernd $= 0{,}8$ zu setzen, somit in der Formel 216

$$\varrho'_3 = \frac{10}{4\pi} = 0{,}8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 217)$$

Schreibt man die Formel 216 oder auch 221 in der vereinfachten Gestalt

$$Z = \frac{mJ}{R'_3 + R'_2 + R'_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 218)^1)$$

wobei also $R'_3 = 0{,}8 \frac{l_3}{q_3}$, so kann man sich die Gesammtzahl m der Magnetwindungen in drei Theile $m_3 + m_2 + m_1 = m$ in der Art zerlegt denken, daß

$$m_3 J = Z R'_3; \quad m_2 J = Z R'_2; \quad m_1 J = Z R'_1 \quad . \quad . \quad . \quad 219)$$

oder allgemein $m_a J = Z R'_a$, wobei dann immer $m_a J = Z R'_a$ die Zahl der Ampèrewindungen bedeutet, die erforderlich sind, um die Kraftlinienzahl Z in dem Theile des magnetischen Kreises hervorzurufen, der den magnetischen Widerstand R'_a hat.

Dabei ist jedoch wohl zu beachten, daß die in den zwei Widerstandswerthen R'_2 und R'_1 (nämlich des Schenkeleisens und des Ankereisens) als Factoren enthaltenen specifischen Widerstände ϱ'_2 und ϱ'_1 nach Formel 215 mit den Werthen μ_2 und μ_1 der Permeabilität verkehrt proportional und somit auch Functionen von Z sind, denn nach Formel 187 ist $\mu = \frac{B}{H}$, wobei $B = \frac{Z}{q}$, wenn q der Querschnitt des betreffenden Eisentheiles (z. B. des Schenkeleisens oder des Ankereisens) bedeutet.

Um diese Abhängigkeit in Rechnung zu bringen, könnte man z. B. die Fleming'sche Formel 195 benutzen, in der die Permeabilität als Function

---

[1]) Die Accente sollen immer bedeuten, daß sich die Widerstandswerthe auf die „practische Einheit" beziehen, daß also allgemein

$$R' = 0{,}8 \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{q} = 0{,}8\, \varrho \frac{l}{q} = \varrho' \frac{l}{q} = 0{,}8\, R, \text{ wenn } R = \frac{l}{\mu q}.$$

der Liniendichte $B = \frac{Z}{q}$ erscheint, oder allenfalls auch die sogenannte Tangentenfunction von G. Kapp.

Diese Tangentenfunction ist zunächst eine Function des Sättigungsgrades $\sigma = \frac{Z}{\overline{Z}}$, wobei Z die vorhandene und $\overline{Z}$ die im Maximum mögliche Kraftlinienzahl bedeutet, und hat die Form

$$\vartheta(\sigma) = \vartheta\left(\frac{Z}{\overline{Z}}\right) = \frac{tg\frac{\pi}{2}\cdot\frac{Z}{\overline{Z}}}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{Z}{\overline{Z}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 220)$$

wobei ϑ ein Functionszeichen ist.

Wenn also ϱ' den einem bestimmten Anfangszustande der Magnetisirung[1]) zukommenden specifischen magnetischen Widerstand einer Eisensorte vorstellt, so ist $\varrho' . \vartheta\left(\frac{Z}{\overline{Z}}\right)$ der specifische magnetische Widerstand derselben Eisensorte beim Sättigungsgrade $\frac{Z}{\overline{Z}}$. Auf diese Art und wenn man zugleich $\varrho'_3 = 0{,}8$ (Formel 217) einsetzt, geht die Gleichung 216 für diesen höheren Sättigungsgrad über in

$$Z = \frac{mJ}{0{,}8\frac{l_3}{q_3} + \varrho'_2 . \vartheta\left(\frac{Z}{\overline{Z}}\right)\cdot\frac{l_2}{q_2} + \varrho'_1 . \vartheta\left(\frac{Z}{\overline{Z}}\right)\cdot\frac{l_1}{q_1}} \quad \ldots \quad 221)$$

Auch diese Gleichung kann, da sie die Form 218 hat, in die Gleichungen 219 zerlegt werden.

Das erste Glied des Nenners in den Ausdrücken 216, 218 und 221 für die Kraftlinienzahl Z ist, wie ersichtlich, von dieser Kraftlinienzahl unabhängig, da es den magnetischen Widerstand des „Interferricums" darstellt. So nennt man[2]) eine in einen magnetischen Kreis eingeschaltete Luftschichte, oder auch Schichten anderer Stoffe (z. B. Kupfer, Isolirmateriale), denen man, wenngleich nicht genau richtig[3]), dieselbe unveränderliche magnetische Permeabilität $\mu_3 = 1$ zuschreibt, wie der Luft oder dem leeren Raume[4]).

---

[1]) In den in der 2. Auflage dieses Buches besprochenen, zur Dynamoberechnung dienenden Kapp'schen Formeln sind als Anfangswerthe der Permeabilität für das Ankereisen Werthe zwischen 700 und 900 angenommen (S. 65 und 86).

[2]) Der Ausdruck ist dem von Hospitalier gebrauchten „entrefer" nachgebildet und seither gangbar geworden. Siehe H. du Bois, Magnetische Kreise, S. 11.

[3]) Siehe die dritte Anmerkung zu diesem Paragraphen.

[4]) Strenge genommen ist die Permeabilität des leeren Raumes = 1 angenommen.

Dagegen sind die beiden anderen Glieder des Nenners in den angeführten Ausdrücken für die Kraftlinienzahl Z von dieser Zahl abhängig, da sie die magnetischen Widerstände der Eisentheile (Schenkeleisen und Ankereisen) des betrachteten magnetischen Kreises darstellen.

Hieraus ist ersichtlich, daß ein die Feldstärke einer Dynamomaschine darstellender Ausdruck, der im Zähler die magnetisirende Kraft oder Stromstärke und im Nenner die magnetischen Widerstände enthält, im Nenner ein von der magnetischen Beschaffenheit (Permeabilität) der Eisentheile unabhängiges, weil nur auf den magnetischen Luftwiderstand bezügliches Glied enthalten muß.

Dasselbe gilt von analogen Magnetisirungsformeln für gerade Electromagnete. Soll z. B. die Frölich'sche Gleichung $M = \frac{mJ}{a + bmJ}$ den Stabmagnetismus (das magnetische Moment, oder die Kraftlinienzahl) darstellen, so muß die Constante a auch in diesem Falle von der Beschaffenheit des Eisens unabhängig sein, denn sie bezieht sich in diesem Falle, wie Zickler[1]) gezeigt hat, auf den magnetischen Ausbreitungswiderstand der den Stab umgebenden Luft, durch die die Kraftlinien außerhalb des Stabes von Pol zu Pol gehen.

Anders verhält es sich mit den für geschlossene Ringmagnete geltenden Magnetisirungsformeln, welche Formeln ein solches Glied natürlich nicht enthalten können. Wenn man z. B. aus der aus Versuchen mit einem geschlossenen Ringmagnet abgeleiteten Gleichung 184 eine der Frölich'schen analoge Magnetisirungsformel ableitet, so erhält man

$$s = \frac{H}{\frac{1}{A\bar{s}} + \frac{1}{\bar{s}} H} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 222)$$

in welcher Gleichung sowohl $a = \frac{1}{A\bar{s}}$, als auch $b = \frac{1}{\bar{s}}$ von der magnetischen Capacität $\bar{s}$ des Eisens abhängen.

In geschichtlicher Hinsicht möchten wir endlich noch Folgendes bemerken. Die Vorstellungen von einer magnetischen Leitungsfähigkeit oder einem magnetischen Widerstande sind keineswegs neu, sondern sind schon seit etwa acht Decennien mehr oder weniger klar und bestimmt von verschiedenen Physikern erfaßt und ausgesprochen worden, worüber man in Silv. Thompson's Dynamo-Electric Machinery Ausführliches findet. Die erste mathematische Formulirung in Gestalt einer dem Ohm'schen Gesetze analogen Gleichung für die durch die magnetisirende Kraft M in einem Ringmagnete hervorgerufene Kraftlinienzahl $Q = \frac{M}{R}$, wobei R den magnetischen Widerstand bedeutet, scheint nach diesen

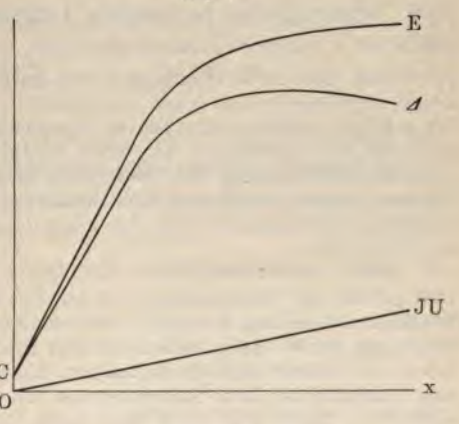
[1]) Electromagnetische Untersuchungen. Zeitschr. f. Electrotechnik, Bd. 7 (1889).

Mittheilungen wohl von Rowland (1873) ausgegangen zu sein. Lord Elphistone und Mr. Vincent machten auch schon den practischen Werth des Principes vom magnetischen Stromkreise für den Bau der Dynamomaschinen geltend. H. M. Bosanquet (1882, 1883) führte den Begriff der magnetomotorischen Kraft ein und bildete die Theorie vom magnetischen Widerstande weiter aus, indem er sie auf zusammengesetzte magnetische Stromkreise anwenden lehrte. Im Jahre 1884 stellte Rowland in einem in Philadelphia gehaltenen Vortrage bereits eine Formel auf für die Kraftlinienzahl in einem Feldmagneten, nämlich in der Form $B = \frac{NC}{\frac{L}{S\mu} + \frac{l}{A+p}}$, wobei N die Windungszahl, C die Stromstärke, L die Länge des Magneteisens, S dessen Querschnitt, μ dessen Permeabilität bedeutet, ferner l die Gesammtweite des beiderseitigen Raumes (air-gap) zwischen Schenkeleisen und Ankereisen, A den Querschnitt des von den Kraftlinien durchsetzten Luftraumes und endlich p eine Größe, durch deren Einführung der Streuung der Kraftlinien Rechnung getragen werden soll.

Wir vermissen in diesem Ausdrucke ein auf den magnetischen Widerstand des Ankereisens bezügliches Glied, das später G. Kapp (1885) eingeführt hat.

Characteristik. John Hopkinson hat 1879 zuerst die Abhängigkeit 78
der in einer Hauptstrommaschine erzeugten electromotorischen Kraft E von der Stromstärke J bei constanter Tourenzahl dargestellt und nachgewiesen, daß die die electromotorische Kraft als eine Function der (durch Aenderungen des äußeren Widerstandes geänderten) Stromstärke darstellende Curve eine der Magnetisirungscurve ähnliche, nämlich Anfangs merklich geradlinige, später gegen die Abscissenaxe concave und endlich gegen eine zur Abscissenaxe parallele Gerade asymptotisch verlaufende Curve ist [1]).

Fig. 6.



[1]) Die empirische Characteristik (Fig. 6) geht aber nicht, wie die Magnetisirungscurve des ursprünglich unmagnetischen Eisens, vom Coordinaten-Ursprunge aus, sondern schneidet die Ordinatenaxe etwas oberhalb desselben, was, wie leicht einzusehen, vom stets vorhandenen magnetischen Rückstande der Feldmagnete herrührt,

Marcel Deprez, der zahlreiche Dynamomaschinen hinsichtlich des Zusammenhanges zwischen electromotorischer Kraft und Stromstärke untersucht und sehr bemerkenswerthe Anwendungen für die Lösung practischer Aufgaben daraus abgeleitet hat, nannte die diesen Zusammenhang darstellende Curve la caractéristique, eine Benennung, die seither allgemein Eingang gefunden hat[1]).

Dabei ist aber wohl zu beachten, daß M. Deprez bei der Aufnahme der Characteristik einer Dynamomaschine etwas anders vorgegangen ist, als J. Hopkinson. Während nämlich Hopkinson den durch die Selbsterregung der Seriemaschine erzeugten Strom J gemessen und als Abscisse aufgetragen hat, hat Deprez die Magnetwickelung vom Anker abgeschaltet und mit einer anderen Stromquelle verbunden, die den magnetisirenden Strom J lieferte. Als electromotorische Kraft wurde bei Hopkinson die Summe der Klemmenspannung und der Spannungsverluste in der Anker- und Schenkelbewickelung, bei Deprez hingegen die Bürstenspannung des mit einem Voltmeter von großem Widerstande geschlossenen Ankers angesehen.

Das Deprez'sche Verfahren gibt, da es von der Rückwirkung des (in diesem Falle fast stromlosen) Ankers frei ist, unter übrigens gleichen Umständen etwas größere (bei älteren Maschinen sogar bedeutend größere) Werthe für die electromotorische Kraft[2]).

Gleichungen der Characteristik sind in verschiedenen Formen aufgestellt worden. Die einfachste darunter beruht auf der Frölich'schen Magnetisirungsformel 179 oder 180. — Versteht man dabei unter M die in der Frölich'schen Theorie der Dynamomaschinen als „wirksamer Magnetismus" definirte Größe, die denselben Zahlenwerth hat wie die bei der Tourenzahl $n = 1$ erregte electromotorische Kraft, so erhält man durch Multiplication mit n aus jeder dieser Gleichungen eine Gleichung der Characteristik, nämlich

---

der auch bei unendlich großem äußeren Widerstande bei rotirendem Anker eine electromotorische Kraft hervorruft. Die Curve verläuft Anfangs merklich geradlinig und wird nach Ueberschreitung von etwa $^2/_3$ des Maximalwerthes von E gegen die Abscissenaxe concav. Bei starker Ankerrückwirkung senkt sich die Curve nach Ueberschreitung eines Maximalwerthes von E gegen die Abscissenaxe. (Siehe Kittler, I, S. 679 bis 690.)

[1]) Die soeben definirte Curve E in Fig. 6 wird häufig die innere Characteristik genannt zur Unterscheidung von der äußeren Characteristik, die den Werth der Klemmenspannung $\Delta = E - JU$ als Function der Stromstärke J darstellt. Wegen des mit der Stromstärke wachsenden Spannungsverlustes JU, wobei U den inneren Widerstand der Maschine bedeutet, muß die äußere Characteristik stets eine nach Ueberschreitung eines Maximalwerthes von Δ gegen die Abscissenaxe abfallende Curve sein, zumal weil wegen Erwärmung auch U mit der Stromstärke wächst. (Kittler, I, S. 699, Fig. 496.)

[2]) Dies wurde von Frölich nachgewiesen und von mir bestätigt gefunden. Siehe Frölich, Die dynamoelectrische Maschine, S. 55; ferner Kittler, I, S. 690 bis 692 und meine Abhandlung über die Characteristik, Centralblatt für Electrotechnik 1885, S. 741.

$$E = \frac{nJ}{a + bJ}^{1)} \quad \text{oder} \quad E = \frac{nmJ}{a + bmJ},$$

wobei a im ersten Falle eine der Windungszahl m verkehrt proportionale Größe ist.

Wir wollen nun anstatt des „wirksamen Magnetismus" M die Anzahl Z der das Ankereisen durchsetzenden Kraftlinien in die Rechnung einführen und können mit Rücksicht auf die zwischen M und Z bestehende Proportionalität bei entsprechender Bewerthung der Constanten a und b

$$Z = \frac{mJ}{a + bmJ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 223)$$

setzen.

Auch diese Gleichung kann als eine Gleichung der Characteristik angesehen werden, da man durch Einsetzen des Ausdruckes 223 für Z in die Gleichung 119, nämlich $E = \frac{NnZ}{6 \cdot 10^9} = eZ$ (wenn man die durch eine einzige Kraftlinie erregte electromotorische Kraft $\frac{Nn}{6 \cdot 10^9} = e$ setzt) sofort eine Gleichung zwischen E und J erhält, nämlich

$$E = \frac{emJ}{a + bmJ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 224)$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Curve E (Fig. 7) ist eine durch den Coordinaten-Ursprung gehende Hyperbel, von deren Asymptoten die eine im Abstande $+ \frac{e}{b}$ mit der Abscissenaxe und die andere im Abstande $- \frac{a}{bm}$ mit der Ordinatenaxe parallel läuft[2]).

Um die Constanten a und b zu bestimmen, kann man so verfahren, daß man die Magnetschenkel mit einer Probewickelung[3]) versieht, der man den Strom einer anderen Stromquelle (Dynamomaschine oder Accumulator) zuführt, und daß man dann bei zwei sehr verschiedenen Werthen von mJ entweder das Z (Formel 223) oder das E (Formel 224) ermittelt.

Um Z unmittelbar zu finden, kann man zunächst die mittlere Stärke B

---

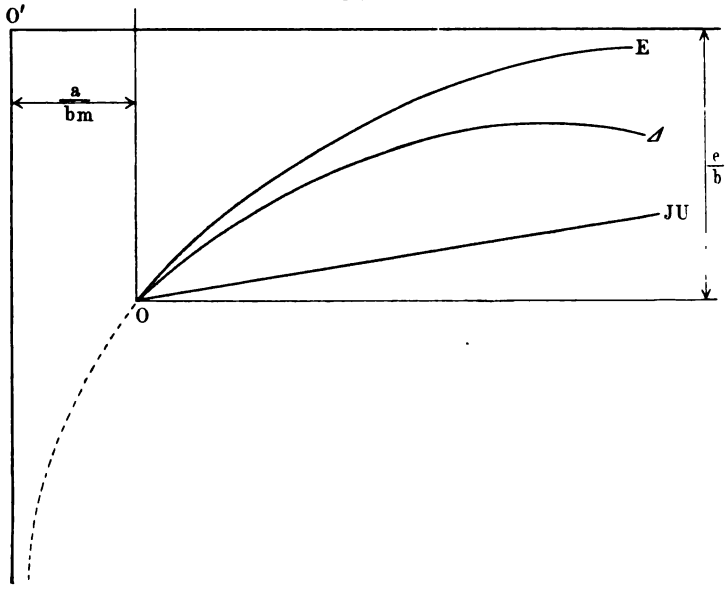
[1]) Von dieser Gleichung habe ich in meiner Abhandlung über die Characteristik (Centralblatt für Electrotechnik, 1885, S. 741) Gebrauch gemacht. Vergl. Frölich, Dynamoelectrische Maschine, S. 55 und Kittler, I, S. 690 bis 692.

[2]) Diesem aus $x = \frac{a}{bm}$ und $y = -\infty$ kommenden und durch den Coordinaten-Ursprung nach $x = +\infty$ und $y = \frac{e}{b}$ verlaufenden, im dritten Quadranten der Asymptoten gelegenen Aste liegt ein zweiter im ersten Quadranten gegenüber.

[3]) Vergl. W. Dietrich, Die Vorausberechnung der Dynamomaschinen. Electrotechnische Zeitschrift 1887, März.

des Magnetfeldes[1]) zwiſchen Polſchuh und Ankereiſen mit Hilfe des balliſtiſchen Galvanometers (Drahtſchleife[2]) oder der Wismuthſpirale meſſen. Durch Multiplication mit dem Querſchnitte Q des Kraftlinienweges, nämlich des Interferricums, erhält man dann die geſuchte Kraftlinienzahl $Z = BQ$.

Fig. 7.



Die electromotoriſche Kraft E kann unmittelbar nach dem bereits beſprochenen Deprez'ſchen Verfahren ermittelt werden, indem man die Bürſtenſpannung mittelſt eines Voltmeters von großem Widerſtande mißt und $E =$ ſetzt.

Kennt man die Drahtzahl N der Ankerbewickelung (die allenfalls auch eine Probewickelung ſein kann) und die beim Verſuche beobachtete Tourenzahl n, ſo ergibt ſich aus dem gemeſſenen E nach Formel 119 auch das $Z = \frac{6.10^9 E}{Nn}$

$= \frac{E}{e}$.

Aus zwei Paaren zuſammengehöriger Werthe von mJ und Z oder von mJ und E, oder, da m conſtant bleibt, aus zwei Paaren zuſammengehöriger Werthe von J und Z oder von J und E ergeben ſich dann mittelſt der Formeln 223 oder 224 die Werthe der Conſtanten a und b, die nur von den magnetiſchen Widerſtänden abhängen.

[1]) Vergl. die vorhin citirte Abhandlung von W. Dietrich, Die Vorausberechnung der Dynamomaſchinen.

[2]) Vergl. §. 29 zweite Anmerkung.

Bei dem beschriebenen Verfahren wird man die Stromstärken so wählen, daß sie nicht außerhalb des Bereiches der beim practischen Gebrauche der Maschine zur Anwendung kommenden Stromstärken liegen. Auch wird man eine angemessene Tourenzahl einhalten [1]).

Eine andere Gleichung der Characteristik ergibt sich aus der Kapp'schen Formel 221, die wir, wie W. Dietrich bemerkt [2]), auf die Form

$$mJ = LZ + Mtg\,CZ \quad \ldots\ldots\ldots \quad 225)$$

bringen können, worin L den magnetischen Widerstand der Luftschichte, M jenen der Eisentheile getheilt durch $\frac{\pi}{2}$ bedeuten und $C = \frac{\pi}{2Z}$ ist. Setzt man nun $Z = \frac{6.10^9 E}{Nn} = \frac{E}{e}$ in die vorstehende Gleichung ein, so erhält man

$$mJ = L_0 E + Mtg\,C_0 E \quad \ldots\ldots\ldots \quad 226)$$

als Gleichung einer Characteristik, deren Constante L_0 und C_0 dann auch noch von der Zahl (N) der Ankerdrähte und von der Tourenzahl (n) abhängen.

Auch aus der Müller'schen Formel 201 ließe sich in ähnlicher Weise eine Gleichung der Characteristik und zwar von der Form

$$mJ = Atg\,BE \quad \ldots\ldots\ldots \quad 227)$$

ableiten, wobei A und B wieder Constante sind, die von den Abmessungen und von der physicalischen Beschaffenheit der Theile des magnetischen Kreises abhängen.

Ist im Allgemeinen $Z = f(J)$ eine z. B. der Gleichung 223 analoge Gleichung der Magnetisirungscurve einer Dynamomaschine, so ist $E = ef(J)$ die entsprechende, der Gleichung 224 analoge Gleichung der Characteristik derselben Maschine.

Da die „Ankerconstante" $e = \frac{Nn}{6.10^9}$ die Tourenzahl n als Factor enthält, so ist einleuchtend, daß jede Characteristik nur für eine bestimmte Tourenzahl Geltung haben kann und daß bei eintretender Aenderung der Tourenzahl die Ordinaten der Curve (nämlich die Werthe von E) proportional der Tourenzahl sich ändern müssen.

Güteverhältniß. Electrisches Güteverhältniß oder electrischer Wirkungs- 79
grad einer Dynamomaschine heißt das Verhältniß der electrischen Nutzleistung zur electrischen Gesammtleistung der Maschine. Der allgemeine Ausdruck für das electrische Güteverhältniß G ist also

[1]) Siehe Kittler, I, S. 772.

[2]) Die Vorausberechnung der Dynamomaschinen. E. T. Z. 1887, März, S. 5 des Separatabdruckes.

$$G = \frac{J\Delta}{J_1 E} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 228)$$

wenn J den Nutzstrom (Stromstärke im äußeren Stromkreise), Δ die Klemmenspannung, J_1 den Ankerstrom[1]) und E die electromotorische Kraft bedeuten.

Bezeichnet man die Widerstände im Anker[2]) in der Magnetbewickelung und im äußeren Stromkreise der Reihe nach mit α, β und γ, so ist $\Delta = J\gamma$

Fig. 8.

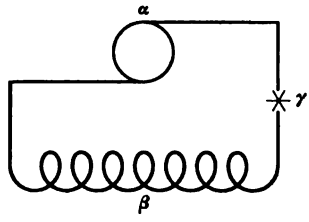
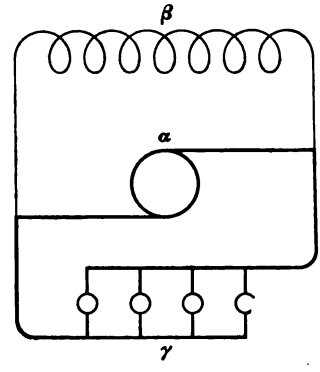


Fig. 9.



und man kann $E = J_1 W$ setzen, wenn man bei der Serienmaschine (Fig. 8) $W = \alpha + \beta + \gamma$ und bei der Nebenschlußmaschine (Fig. 9) $W = \alpha + \frac{\beta\gamma}{\beta + \gamma}$ annimmt, da bei der Nebenschlußmaschine β und γ hinter α parallel geschaltet sind[3]).

Man kann also das electrische Güteverhältniß auch in der Form

$$G = \frac{J^2\gamma}{J_1^2 W} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 229)$$

ausdrücken.

Da nun bei der Serienmaschine $J = J_1$ und bei der Nebenschlußmaschine nach bekannten Gesetzen der Stromverzweigung $J = \frac{\beta}{\beta + \gamma} \cdot J_1$ ist, so läßt sich das electrische Güteverhältniß in beiden Fällen durch einen Ausdruck darstellen, der nur die drei Widerstände α, β und γ enthält, wobei wir für den inneren Widerstand der Serienmaschine auch noch die Bezeichnung $u = \alpha + \beta$ einführen wollen.

---

[1]) Summe der beiden Ströme, die in den parallel geschalteten Hälften der Ankerbewickelung von Bürste zu Bürste verlaufen. (Wir setzen hier eine zweipolige Gleichstrommaschine mit Ring- oder Trommelanker voraus.)

[2]) Entsprechend dem über den Ankerstrom Gesagten verstehen wir unter dem Ankerwiderstand den halben Widerstand einer der beiden zwischen den Bürsten parallel geschalteten Hälften der Ankerwickelung.

[3]) Bei der Nebenschlußmaschine befindet sich der Regulirwiderstand im Nebenschlusse und ist also in der Größe β enthalten. Der hierzu dienende Rheostat wird deßhalb auch Nebenschlußregulator genannt.

Es ist demnach bei der Serienmaschine

$$G = \frac{\gamma}{u + \gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 230)$$

und bei der Nebenschlußmaschine

$$G = \frac{\beta^2 \gamma}{\beta^2(\alpha + \gamma) + \gamma^2(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta\gamma} \quad \ldots \quad 231)$$

Es kommen dann noch die Maschinen mit gemischter Wickelung, auch Compoundmaschinen genannt, in Betracht. Bei diesen Maschinen sind zwei Magnetwickelungen vorhanden, eine dünndrahtige, vom Widerstande β, wie bei der Nebenschlußmaschine, welche Wickelung man auch bei der Compoundmaschine die Nebenschlußwickelung nennt, und außerdem noch eine dickdrahtige Wickelung von kleinerem Widerstande δ, die man die directe Wickelung genannt hat, da sie mit dem Anker in Serie geschaltet ist[1]), während β entweder zu $\alpha + \delta$ oder nur zu α den Nebenschluß bildet. Im ersten Falle nennt man die Compoundmaschine eine solche mit langem Nebenschluß (Fig. 10), im zweiten Falle eine solche mit kurzem Nebenschluß (Fig. 11). Man pflegt wohl auch zu sagen, daß die Nebenschlußwickelung (β) im ersten Falle parallel zum äußeren Stromkreise (γ), im zweiten Falle hingegen parallel zum Anker (α) geschaltet ist.

Fig. 10.

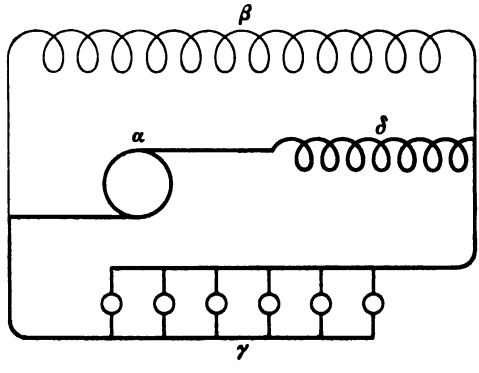
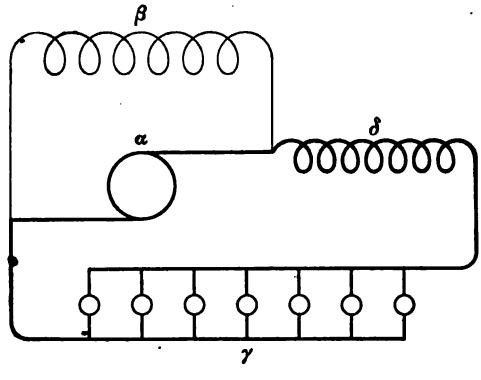


Fig. 11.



[1]) Ganz zutreffend ist die so begründete Benennung als „directe" Wickelung wohl nur beim langen Nebenschluß, wo diese Wickelung den ganzen Ankerstrom aufnimmt, während beim kurzen Nebenschluß eine Abzweigung vom Anker in diesen Nebenschluß stattfindet, da hier die beiden Magnetwickelungen (β und δ) in einem Knotenpuncte mit dem Anker (α) verbunden sind.

Die Formel 231 für das Güteverhältniß der Nebenschlußmaschine kann sofort auch auf die Compoundmaschinen angewendet werden, wenn man beim langen Nebenschluß anstatt α die Größe $\alpha' = \alpha + \delta$ und beim kurzen Nebenschluß anstatt γ die Größe $\gamma' = \gamma + \delta$ in die Formel 231 einsetzt.

Bei der Nebenschlußmaschine muß γ im Vergleiche mit β klein und um so mehr α gegen β sehr klein sein. Mit Rücksicht darauf ergibt sich nach leicht übersichtlichen Abkürzungen der Näherungswerth

$$G \doteq \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 232)$$

welcher Ausdruck für $\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$ ein Maximum wird (W. Thomson'sche Regel) und in

$$\overline{G} = \frac{1}{1 + 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 233)$$

übergeht, aus welcher Gleichung das einem verlangten maximalen Güteverhältniß entsprechende Verhältniß des Ankerwiderstandes zum Nebenschlußwiderstande sich ergibt, z. B. für $\overline{G} = 0{,}91$ das Verhältniß $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{400}$.

Der practische Werth dieses Principes ist jedoch durch die Beschränkungen, denen seine Anwendung unterliegt, wesentlich beeinträchtigt [1]).

Zur Unterscheidung vom electrischen Güteverhältnisse oder Wirkungsgrade nennt man das Verhältniß der electrischen Nutzleistung $J\Delta$ der Dynamomaschine zu der zum Betriebe derselben erforderlichen mechanischen Leistung P (wobei wir uns beide Leistungen in Watt ausgedrückt denken wollen) den mechanischen oder commerciellen Wirkungsgrad der Dynamomaschine. Man bezeichnet diesen Wirkungsgrad häufig mit η und hat dann die Formel

---

[1]) Man kann nämlich nicht beliebig hohe Werthe von $\overline{G}$ dieser Rechnung zu Grunde legen, weil man dabei bald auf Widerstandsverhältnisse $\frac{\alpha}{\beta}$ kommt, die mit anderen Constructionsbedingungen (hinsichtlich der Drahtdicken und Wickelungsräume) nicht vereinbar sind.

Bei einer von mir untersuchten Nebenschlußmaschine ($\Delta = 60$ Volt, $J = 60$ Ampère, also $\gamma = 1$ Ohm) war $\alpha = 0{,}038$; $\beta = 22{,}48$, also $\sqrt{\alpha\beta} = 0{,}924$ anstatt $\sqrt{\alpha\beta} = 1$. Für das Güteverhältniß ergibt sich dann $g = 0{,}920$ (nach Formel 231).

In allen Fällen aber müssen die Widerstandsverhältnisse bei der Nebenschlußmaschine aus naheliegenden Gründen so gewählt werden, daß der magnetisirende Strom im Vergleiche mit dem Nutzstrom sehr klein ist. In der soeben erwähnten von mir untersuchten Maschine ist dieses Verhältniß rund $\frac{1}{20}$. (Vergl. auch Gordon, Silv. Thompson u. A.)

Es ist demnach bei der Serienmaschine

$$G = \frac{\gamma}{u + \gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 230)$$

und bei der Nebenschlußmaschine

$$G = \frac{\beta^2 \gamma}{\beta^2(\alpha + \gamma) + \gamma^2(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta\gamma} \quad \ldots \quad 231)$$

Es kommen dann noch die Maschinen mit gemischter Wickelung, auch Compoundmaschinen genannt, in Betracht. Bei diesen Maschinen sind zwei Magnetwickelungen vorhanden, eine dünndrahtige, vom Widerstande β, wie bei der Nebenschlußmaschine, welche Wickelung man auch bei der Compoundmaschine die Nebenschlußwickelung nennt, und außerdem noch eine dickdrahtige Wickelung von kleinerem Widerstande δ, die man die directe Wickelung genannt hat, da sie mit dem Anker in Serie geschaltet ist[1]), während β entweder zu $\alpha + \delta$ oder nur zu α den Nebenschluß bildet. Im ersten Falle nennt man die Compoundmaschine eine solche mit langem Nebenschluß (Fig. 10), im zweiten Falle eine solche mit kurzem Nebenschluß (Fig. 11). Man pflegt wohl auch zu sagen, daß die Nebenschlußwickelung (β) im ersten Falle parallel zum äußeren Stromkreise (γ), im zweiten Falle hingegen parallel zum Anker (α) geschaltet ist.

Fig. 10.

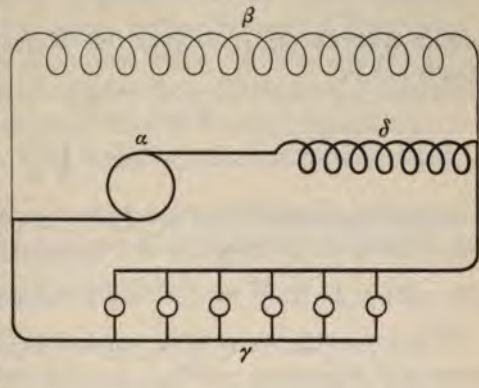
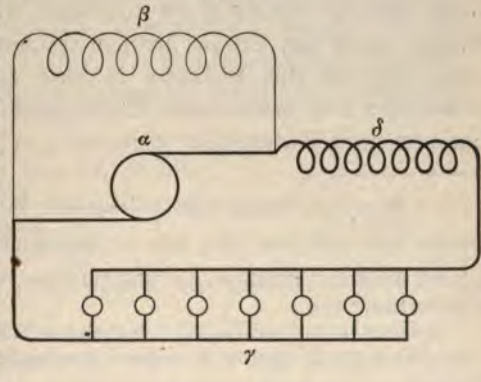


Fig. 11.



[1]) Ganz zutreffend ist die so begründete Benennung als „directe" Wickelung wohl nur beim langen Nebenschluß, wo diese Wickelung den ganzen Ankerstrom aufnimmt, während beim kurzen Nebenschluß eine Abzweigung vom Anker in diesen Nebenschluß stattfindet, da hier die beiden Magnetwickelungen (β und δ) in einem Knotenpuncte mit dem Anker (α) verbunden sind.

Die Formel 231 für das Güteverhältniß der Nebenschlußmaschine kann sofort auch auf die Compoundmaschinen angewendet werden, wenn man beim langen Nebenschluß anstatt α die Größe $\alpha' = \alpha + \delta$ und beim kurzen Nebenschluß anstatt γ die Größe $\gamma' = \gamma + \delta$ in die Formel 231 einsetzt.

Bei der Nebenschlußmaschine muß γ im Vergleiche mit β klein und um so mehr α gegen β sehr klein sein. Mit Rücksicht darauf ergibt sich nach leicht übersichtlichen Abkürzungen der Näherungswerth

$$G \doteq \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 232)$$

welcher Ausdruck für $\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$ ein Maximum wird (W. Thomson'sche Regel) und in

$$\overline{G} = \frac{1}{1 + 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 233)$$

übergeht, aus welcher Gleichung das einem verlangten maximalen Güteverhältniß entsprechende Verhältniß des Ankerwiderstandes zum Nebenschlußwiderstande sich ergibt, z. B. für $\overline{G} = 0{,}91$ das Verhältniß $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{400}$.

Der practische Werth dieses Principes ist jedoch durch die Beschränkungen, denen seine Anwendung unterliegt, wesentlich beeinträchtigt[1]).

Zur Unterscheidung vom electrischen Güteverhältnisse oder Wirkungsgrade nennt man das Verhältniß der electrischen Nutzleistung $J\Delta$ der Dynamomaschine zu der zum Betriebe derselben erforderlichen mechanischen Leistung P (wobei wir uns beide Leistungen in Watt ausgedrückt denken wollen) den mechanischen oder commerciellen Wirkungsgrad der Dynamomaschine. Man bezeichnet diesen Wirkungsgrad häufig mit η und hat dann die Formel

---

[1]) Man kann nämlich nicht beliebig hohe Werthe von $\overline{G}$ dieser Rechnung zu Grunde legen, weil man dabei bald auf Widerstandsverhältnisse $\frac{\alpha}{\beta}$ kommt, die mit anderen Constructionsbedingungen (hinsichtlich der Drahtdicken und Wickelungsräume) nicht vereinbar sind.

Bei einer von mir untersuchten Nebenschlußmaschine ($\Delta = 60$ Volt, $J = 60$ Ampère, also $\gamma = 1$ Ohm) war $\alpha = 0{,}038$; $\beta = 22{,}48$, also $\sqrt{\alpha\beta} = 0{,}924$ anstatt $\sqrt{\alpha\beta} = 1$. Für das Güteverhältniß ergibt sich dann $g = 0{,}920$ (nach Formel 231).

In allen Fällen aber müssen die Widerstandsverhältnisse bei der Nebenschlußmaschine aus naheliegenden Gründen so gewählt werden, daß der magnetisirende Strom im Vergleiche mit dem Nutzstrom sehr klein ist. In der soeben erwähnten von mir untersuchten Maschine ist dieses Verhältniß rund $\frac{1}{20}$. (Vergl. auch Gordon, Silv. Thompson u. A.)

$$\eta = \frac{J\Delta}{P} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 234)$$

Uebrigens ist vom mechanischen Wirkungsgrade schon im §. 50 (I. Theil) die Rede gewesen.

Strom- und Spannungscurven. Jede Magnetisirungsformel kann, 80
wie Frölich zuerst gezeigt hat, in Verbindung mit dem Grundgesetze der magnetoelectrischen Induction und dem Ohm'schen Gesetze einer Theorie der Dynamomaschinen als Grundlage dienen.

Je nach der Formulirung des Magnetisirungs- und Inductionsgesetzes werden sich die Ausdrücke für die electrischen Größen (Strom- und Spannungswerthe) der in Betracht gezogenen Dynamomaschinen verschieden gestalten.

Wir wollen hier von der Frölich'schen Magnetisirungsformel ausgehen, jedoch einen von dem Frölich'schen etwas abweichenden Entwickelungsgang verfolgen, um auf möglichst kurzem Wege einige der bemerkenswerthesten Hauptresultate übersichtlich darzustellen.

Wir haben schon im Vorhergehenden aus der Frölich'schen Magnetisirungsformel 223 und der Inductionsformel 119 die Gleichung 224 für die Characteristik abgeleitet, die wir nun in der Gestalt

$$E = \frac{J_2}{\frac{a}{em} + \frac{b}{e} J_2} = \frac{J_2}{p + q J_2} \quad \ldots \ldots \quad 235)$$

schreiben wollen, indem wir mit J_2 den Strom in der Magnetwickelung bezeichnen.

Indem wir nun zunächst nicht eine Serienmaschine, sondern, um einen allgemeineren Fall vorausgehen zu lassen, eine Nebenschlußmaschine betrachten, können wir den magnetisirenden Strom J_2 durch den Ankerstrom J_1 ausdrücken, indem wir

$$J_2 = \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \cdot J_1 = k J_1 \quad \ldots \ldots \quad 236)$$

einsetzen und nunmehr den Ausdruck

$$E = \frac{k J_1}{p + k q J_1} \quad \ldots \ldots \quad 237)$$

erhalten.

Verbindet man nun diese Gleichung mit dem Ausdrucke $E = J_1 W$ des Ohm'schen Gesetzes, wobei, wie im vorhergehenden Paragraphen bereits erörtert worden ist, $W = \alpha + \frac{\beta\gamma}{\beta + \gamma}$ den Widerstand des Ankerstromkreises bei der Nebenschlußmaschine vorstellt, so erhält man aus $\frac{k J_1}{p + k q J_1} = J_1 W$ zunächst die Gleichung

$$J_1 = \frac{1}{q\,W} - \frac{p}{kq} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 238)$$

als Gleichung für den Ankerstrom.

Mehr practisches Interesse hat aber die Gleichung für die Klemmenspannung oder Polspannung, deren Werth man durch Multiplication des Ankerstromes J_1 mit dem Widerstande $\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}$ außerhalb des Ankers erhält. Berücksichtigt man dabei die bereits angegebenen Bedeutungen von

$$W = \alpha + \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} \text{ und } k = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}$$

in der Gleichung 238, so erhält man daraus nach einigen Abkürzungen den Werth der Klemmenspannung

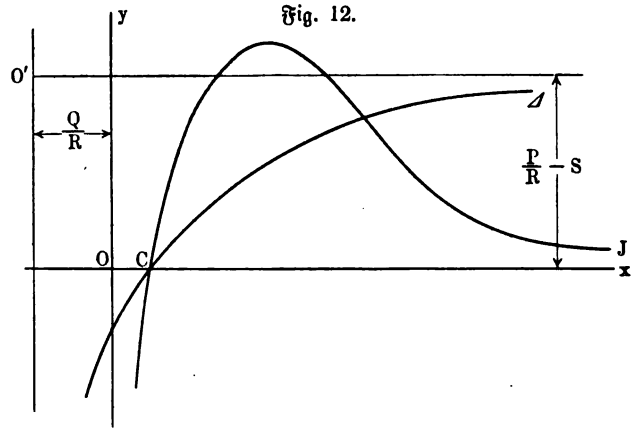
$$\Delta = \frac{\beta\gamma}{q(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)} - \frac{p\beta}{q} \quad \ldots\ldots \quad 239)$$

Stellt man die Klemmenspannung Δ als Function des äußeren Widerstandes (des Nutzwiderstandes) γ dar und bezeichnet diesen allenfalls mit x, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$\Delta = y = \frac{Px}{Q+Rx} - S \quad \ldots\ldots \quad 240)$$

entsprechend einem Hyperbel-Aste (Δ in Fig. 12), der einerseits für $x = +\infty$

Fig. 12.



gegen eine im Abstande $y = \frac{P}{R} - S$ oberhalb der Abscissenaxe mit dieser parallele Asymptote, andererseits aber für $x = -\frac{Q}{R}$ gegen eine in diesem

Abstande mit der Ordinatenaxe parallele Asymptote mit $\Delta = -\infty$ convergirt [1]).

Es ist leicht einzusehen, daß eine solche Curve nur in beschränkter Ausdehnung mit den Thatsachen übereinstimmen kann, da sich bei Außerachtlassung gewisser Beschränkungen absurde Folgerungen ergeben würden. Nichtsdestoweniger haben derartige Formeln einen gewissen Werth, wenn sie das Verhalten der Dynamomaschinen verschiedener Schaltungsart auch nur innerhalb gewisser Grenzen und auch nur annähernd übersichtlich machen.

In diesem Sinne vergleicht z. B. W. Dietrich [2]) die Frölich'sche Magnetisirungsformel mit dem Mariotte'schen Gesetze; beide stellen eine erste Annäherung an die Wahrheit dar, wie es bei allen empirischen Formeln (Interpolationsformeln) mehr oder weniger zutrifft.

Für den Nutzstrom der Nebenschlußmaschine ergibt sich aus 240

$$J = \frac{\Delta}{x} = y = \frac{P}{Q + Rx} - \frac{S}{x} \quad \ldots \quad 241)$$

darstellend eine Curve (J in Fig. 12), die bei $x = 0$ aus $y = -\infty$ kommend die Abscissenaxe in demselben Puncte durchschneidet wie die Polspannungscurve, nämlich im Abstande $x = \frac{QS}{P - RS}$. Die Curve erhebt sich concav gegen die Abscissenaxe, um dann nach Ueberschreitung eines Maximums gegen diese abzufallen und asymptotisch zu convergiren. Der abfallende Curventheil entspricht dem practischen Betriebe [3]).

Für die Serienmaschine ist $k = 1$ und $J_1 = J_2 = J$, folglich nach Formel 238

$$J = \frac{1}{qW} - \frac{p}{q} \quad \ldots \quad 242)$$

Setzt man $W = \alpha + \beta + \gamma = U + x$, indem man den inneren Widerstand $\alpha + \beta$ der Maschine mit U und den äußeren oder Nutzwiderstand auch hier mit x bezeichnet, so ergibt sich hieraus für die Stromcurven ein Ausdruck von der Form

---

[1]) Die Curve schneidet die Abscissenaxe im Abstande $x = \frac{QS}{P - RS}$, wie die nachstehend besprochene Stromcurve 241.

[2]) In der bereits citirten Abhandlung: Die Vorausberechnung der Dynamomaschinen.

[3]) Diese beiden Curven lassen erkennen, daß (bei nicht allzu kleinen äußeren Widerständen) vorkommende Widerstandsänderungen (z. B. durch Aus- oder Einschalten von Glühlampen) und damit verbundene Stromesänderungen nur von verhältnißmäßig kleinen Spannungsänderungen begleitet sind, die sich mit dem Nebenschlußregulator leicht (allenfalls auch automatisch) ausgleichen lassen, worauf die besondere Eignung der Nebenschlußmaschine für Glühlichtbetrieb beruht.

$$J = y = \frac{A}{U + x} - D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 243)$$

und für die Polspannungscurve

$$Jx = \Delta = y = \frac{Ax}{U + x} - Dx \quad . \quad . \quad . \quad 244)$$

Die Stromcurve (243) ist ein Hyperbel-Ast, dessen eine Asymptote im Abstande $y = -D$ mit der Abscissenaxe, die andere im Abstande $x = -U$ mit der Ordinatenaxe parallel ist.

Die Polspannungscurve (244) geht durch den Coordinatenursprung und erhebt sich concav gegen die Abscissenaxe, um nach Ueberschreitung eines Maximums gegen diese abzufallen und mit ihr zum Durchschnitte zu kommen, während bei der dem wirklichen Verhalten einer Serienmaschine entsprechenden Polspannungscurve der absteigende Ast asymptotisch gegen die Abscissenaxe ausläuft [1]).

Die Anwendung der Frölich'schen Theorie auf die Maschinen mit gemischter Wickelung gestaltet sich natürlich weniger einfach und sie führt auch zu weniger lehrreichen Ergebnissen, weßhalb wir hier nicht darauf eingehen wollen.

Für die electromotorische Kraft gelten, mit Beibehaltung der bereits eingeführten Bezeichnungen, nachstehende Formeln.

Bei der Serienmaschine $E = J(\alpha + \beta + \gamma) = J(\alpha + \beta) + J\gamma$, also

$$E = JU + \Delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 245)$$

Bei der Nebenschlußmaschine $J_1\alpha + J_1 \frac{\beta\gamma}{\beta + \gamma} = J_1\alpha + J\gamma$, also

$$E = J_1\alpha + \Delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 246)$$

Aus der Formel für die Nebenschlußmaschine $E = J_1\alpha + J\gamma$ erhält man die electromotorische Kraft der Compoundmaschinen, wenn man bei langem Nebenschluß anstatt α die Größe $\alpha' = \alpha + \delta$ und bei kurzem Nebenschluß anstatt γ die Größe $\gamma' = \gamma + \delta$ einsetzt [2]).

81 **Berechnung der Dynamomaschinen.** Es ist einleuchtend, daß im Hinblick auf den eigentlichen Zweck und auf den dadurch beschränkten Umfang der vorliegenden kleinen Schrift eine systematische und eingehende Besprechung

[1]) Die Serienmaschine (zum Glühlichtbetriebe nicht geeignet) dient meist zum Betriebe hinter einander geschalteter Bogenlampen und zur Kraftübertragung, von der später die Rede sein wird.

[2]) Die Compoundmaschinen, auch Gleichspannungsmaschinen genannt (insofern sie bei richtigem Verhältnisse der beiden Magnetbewickelungen innerhalb weiter Grenzen bei Aenderungen des äußeren Widerstandes und der Stromstärke constante Klemmenspannung einhalten), eignen sich vornehmlich für Glühlichtbetrieb bei Einzelanlagen.

der bei der Berechnung der Dynamomaschinen in Betracht kommenden Aufgaben und Methoden ausgeschlossen ist und nur davon die Rede sein kann, in allgemeinen Andeutungen einen Ueberblick zu geben, der zur Anregung und Orientirung bei weiteren Studien über diesen Gegenstand dienen mag.

Wir unterscheiden zunächst zwei Fälle, je nachdem es sich entweder nur darum handelt, für ein gegebenes Eisengerippe der Maschine die zur Erzielung der verlangten Leistung geeignete Anker- und Schenkelbewickelung ausfindig zu machen, oder auch das Eisengerippe selbst zu entwerfen und dabei die zweckdienlichsten Abmessungen seiner Theile zu ermitteln.

Die Grundlagen für die Berechnung der Dynamomaschinen bilden die in den vorhergehenden Paragraphen abgehandelten Lehrsätze von der electromotorischen Kraft (119), vom magnetischen Widerstande (216), von der Characteristik (224) und vom Güteverhältnisse oder Wirkungsgrade (228, 234); ferner eine Reihe von mechanischen Constructionsregeln und Formeln, die in Specialwerken und ausführlicheren Handbüchern über Electrotechnik[1]) zu suchen sind, wie z. B. für den Aufbau und die Abmessungen des Eisenkernes und für den Durchmesser der Welle des Ankers[2]), für die Form und Dimensionirung

[1]) Z. B. von Arnold, Biscan, Corsepius, Fischer-Hinnen, „Hütte“ (Taschenbuch), Kapp, Kittler, Pechan, Schulz, Strecker (und Grawinkel), Thompson, Uppenborn u. A.

[2]) Für den äußeren Ankerdurchmesser gibt das Taschenbuch „Hütte“ (1899, II, S. 513) nach Fischer-Hinnen die Formel

$$d_a = k \sqrt[3]{\frac{J_1 E}{n \lambda}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 247)$$

dabei bedeutet λ das Verhältniß $\frac{\text{Länge}}{\text{Durchmesser}}$ und hat k die Werthe

$$k = \begin{cases} 11{,}5 \text{ für Ringanker} \\ 10{,}0 \text{ für Trommelanker.} \end{cases}$$

J_1, E und n haben die bereits eingeführten Bedeutungen (also $J_1 E$ electrische Gesammtleistung in Watt).

Für den Durchmesser der Ankerwelle gibt Kittler (I, S. 771) die Formel

$$d = 2 \sqrt[3]{\frac{JA}{\eta n}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 248)$$

wobei JA die Nutzleistung in Watt und η den mechanischen Wirkungsgrad bedeutet. Dagegen gibt das Taschenbuch „Hütte“ (1899, II, S. 517) die Formel

$$d = k \sqrt[3]{\frac{\text{Leistung in } HP}{n}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 249)$$

wobei k Werthe von 16 bis 21 haben kann.

Für das Verhältniß des inneren zum äußeren Ankerdurchmesser gibt S. Thompson folgende Zahlen

$$\frac{d_i}{d_a} = \begin{cases} 0{,}7 \text{ bis } 0{,}8 \text{ beim Ring} \\ 0{,}3 \text{ bis } 0{,}6 \text{ bei der Trommel.} \end{cases}$$

Die angegebenen Ankerdimensionen gelten natürlich alle für den Eisenkern.

der Magnetschenkel und der Polschuhe, für die Construction des Stromabgebers und der Bürsten, für die Herstellung der Anker- und Magnetbewickelungen.

Ist das Eisengerippe einer Dynamomaschine gegeben, so kann man zunächst die Zahl N der Ankerdrähte aus der Formel 119, nämlich $N = \frac{6.10^9 E}{nZ}$ bestimmen, sobald E und Z bekannt sind.

Jedenfalls wird die Klemmenspannung Δ gegeben sein, aus der sich nach Erfahrungen über den procentualen Spannungsverlust die electromotorische Kraft E wenigstens annähernd ergibt[1]).

Nimmt man andererseits für den Anker eine der Beschaffenheit des Eisens angemessene Kraftliniendichte B_1 an[2]), so erhält man durch Multiplication mit dem Ankerquerschnitte Q_1, $Z = B_1 Q$[3]). Diese Kraftlinienzahl in die vorstehende Formel eingesetzt, gibt dann die Zahl N der Ankerdrähte.

Um nun auch die Zahl m der Windungen der Feldmagnetbewickelung zu finden, ist vorerst noch zu beachten, daß wegen der sogenannten Streuung[4]) eine größere Anzahl von Kraftlinien im Schenkeleisen erzeugt werden muß, als im Ankereisen zur Erzielung der verlangten electromotorischen Kraft erforderlich ist. Es werden also auch mehr Ampèrewindungen für die Magnete nöthig sein, als wenn keine Streuung vorhanden wäre.

Ferner verursacht die Verzerrung der Kraftlinien in Folge der Rückwirkung des Ankerstromes einen Verlust an wirksamen Kraftlinien und damit eine Verminderung der electromotorischen Kraft der Maschine[5]). Auch aus

---

[1]) Die „Hütte“ (II, 510) gibt für Stromwärme im Anker 2 Proc. bis 6 Proc. an. Ist für eine Serienmaschine nebst Δ auch das Güteverhältniß G (228) festgesetzt, so gibt diese Formel, da $J_1 = J$, unmittelbar das E. Oft ist die Ankerconstruction nach ausgeführten Vorbildern gegeben und man erhält dann aus 119 unmittelbar das Z.

[2]) Nach Uppenborn (Kalender 1902, S. 87) 10000 bis 13000, „Hütte“ (1899. II) 10000 bis 16000.

[3]) Mit Rücksicht auf die Untertheilung und Stärke der Papierzwischenlagen der Ankerbleche können nur etwa 85 Proc. bis 80 Proc. des gemessenen Querschnittes als wirksamer Eisenquerschnitt (Q_1) angesehen werden. Für die Ankerbreite b gibt die „Hütte“ die Formel $b = k \frac{Q_1}{d_a - d_i}$, wobei $k = 1{,}05$ bis $1{,}20$.

[4]) Unter Streuung versteht man hier den Uebergang von Kraftlinien zwischen den Polschuhen außerhalb des Ankereisens. Der Streuungsverlust, nach Maschinensorte und Stärke der Erregung verschieden, beträgt 10 Proc. bis 30 Proc. Von der Ausgleichung der Ankerrückwirkung, die einem Verluste von etwa 7 Proc. bis 15 Proc. der Kraftlinien entspricht, wird später die Rede sein. (Siehe „Hütte“, II, 512.)

[5]) Die Verminderung der electromotorischen Kraft durch Ankerrückwirkung betrug bei älteren Maschinen mit übersättigten Feldmagneten und ungenügend zertheiltem Ankereisen bis zu 25 Proc., bei neueren Maschinen aber ist sie viel geringer und wohl auch oft unter 5 Proc. Vergl. Kittler, I 553 und meine Abhandlung über die Deprez'sche Charakteristik, Centralblatt für Electrotechnik 1885. Siehe auch die vorhergehende Anmerkung.

diesem Grunde muß ein gewisser Mehrbetrag von Kraftlinien im Schenkeleisen erzeugt und also auch ein gewisser Mehrbetrag von Ampèrewindungen auf den Magneten angewendet werden.

Zunächst wollen wir aber die Anzahl m der Windungen der Feldmagnetbewickelung abgesehen von diesen Verlusten ermitteln, indem wir uns vorbehalten, die wegen Streuung und Ankerrückwirkung erforderlichen Zusatzwindungen nachträglich hinzuzufügen.

Die Windungszahl m ergibt sich aus der Zahl mJ der Ampèrewindungen, sobald die Stärke J des magnetisirenden Stromes (in Formel 235 mit J_2 bezeichnet) bekannt ist. Bei der Serienmaschine ist diese gleich der gegebenen Stärke des normalen Nutzstromes, bei der Nebenschlußmaschine ergibt sie sich aus dem von vornherein festzusetzenden Verhältnisse zum Nutzstrome [1]).

Um nun die Zahl mJ der Ampèrewindungen zu ermitteln, bieten sich verschiedene Wege dar. Ein von W. Dietrich angegebenes Verfahren ist schon im §. 78 über die Characteristik bei der Besprechung der Formel 224 mitgetheilt worden. Es beruht auf Versuchen mit Probewickelungen und setzt daher voraus, daß das Eisengerippe der Maschine bereits angefertigt sei. — Mit Benutzung der Theorie vom magnetischen Widerstande hat zuerst G. Kapp die Berechnung der Dynamomaschinen in umfassender Weise erfolgreich ausgebildet, indem er das Rowland'sche Gesetz in einer Gleichung von der Form 221 den Dynamomaschinen angepaßt und durch Einführung der Tangentenfunction erweitert, seiner Berechnungsmethode zu Grunde legte. — Dann hat K. Zickler eine demselben Zwecke dienliche Gleichung aufgestellt, indem er die Constanten der Frölich'schen Formel für die Characteristik als Functionen der Windungszahlen und der magnetischen Widerstände darstellte [2]) und eine die Kapp'sche Tangentenfunction ersetzende Correction einführte [3]). — Ein drittes von J. Hopkinson herrührendes Verfahren soll im Nachstehenden beschrieben werden.

Wir schicken voraus, daß es in der Praxis bequemer ist, dieses gewöhnlich wie eine graphische Methode beschriebene Verfahren lieber rechnerisch mit Benutzung der für diesen Zweck zur Verfügung stehenden Tabellen durchzuführen.

---

[1]) Bei der Wahl dieses Verhältnisses können die bei der Besprechung des Güteverhältnisses mitgetheilten Erörterungen und die an ausgeführten Maschinen erprobten Verhältnisse maßgebend sein. — Auf eine Besprechung der weniger einfachen Verhältnisse bei den Maschinen mit gemischter Wickelung kann hier nicht eingegangen werden und ich muß diesfalls auf ausführlichere Werke und specielle Abhandlungen hinweisen.

[2]) Die Constante a bezieht sich auf den magnetischen Luftwiderstand, und die Constante b auf den magnetischen Widerstand der Eisentheile.

[3]) Diese beiden Berechnungsarten waren in der zweiten Auflage dieses Buches eingehend erörtert.

Die Darlegung der Theorie dieſer Methode wird aber faßlicher und anſchaulicher ſein, wenn wir ſie vorerſt geometriſch in Betracht ziehen.

Die Unterſuchung der beim Baue einer Dynamomaſchine zu verwendenden Eiſenſorten gibt die Magnetiſirungscurven $y = F(x)$ für das Ankereiſen und $y = f(x)$ für das Schenkeleiſen, wobei wir die Ampèrewindungszahlen pro Längeneinheit als Abſciſſen und die dieſen entſprechenden Kraftliniendichten als Ordinaten einführen, alſo $x = m_1 J$ und $y = B$ annehmen, nämlich $m_1 = \frac{m}{L}$, wobei m die auf die Länge L des Eiſenkernes entfallende Zahl der magnetiſirenden Drahtwindungen iſt.

Wenn man nun aus der Curve $y = F(x)$ eine andere Curve in der Art ableitet, daß man anſtatt der zuſammengehörigen Werthe

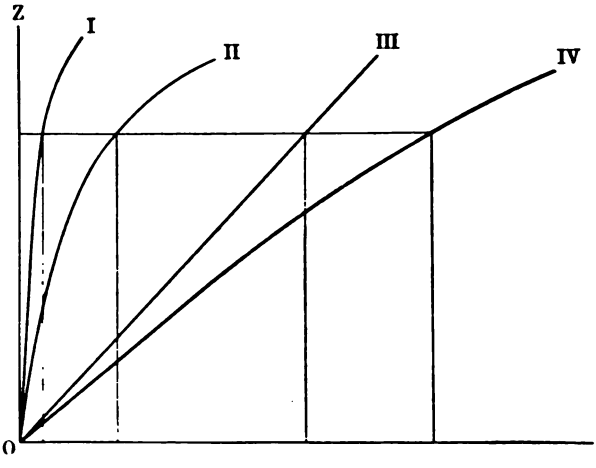
$$\begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

die gleichfalls zuſammengehörigen Werthe

$$\begin{array}{ccccc} Q_1 y_1 & Q_1 y_2 & Q_1 y_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L_1 x_1 & L_1 x_2 & L_1 x_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

als Ordinaten und Abſciſſen aufträgt, ſo erhält man eine neue Curve, die angibt, wie viele Ampèrewindungen (Abſciſſe) erforderlich ſind, um eine gewiſſe

Fig. 13.



Kraftlinienzahl Z (Ordinate) in einem Stücke Ankereiſen von der Länge L_1 und vom Querſchnitte Q_1 hervorzurufen und zu unterhalten, oder, wie man auch zu ſagen pflegt, durch ein ſolches Stück Ankereiſen „hindurchzutreiben“. Dieſe Curve ſoll durch die Curve I in der beigefügten Fig. 13 dargeſtellt ſein.

Wenn man ebenso aus der Curve $y = f(x)$ eine andere Curve in der Art ableitet, daß man anstatt der zusammengehörigen Werthe

$$\begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

die gleichfalls zusammengehörigen Werthe

$$\begin{array}{cccc} Q_2 y_1 & Q_2 y_2 & Q_2 y_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L_2 x_1 & L_2 x_2 & L_2 x_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

aufträgt, so erhält man eine neue Curve, die für ein Schenkeleisenstück von der Länge L_2 und vom Querschnitte Q_2, durch das eine gewünschte Kraftlinienzahl Z (Ordinate) getrieben werden soll, die hierzu erforderliche Ampèrewindungszahl angibt. Diese Curve ist durch die Curve II in der Fig. 13 veranschaulicht.

Die Magnetisirungscurve für Luft $y = \varphi(x)$ ist eine aus dem Coordinatenursprunge unter einem Winkel $\alpha \doteq 51^1/_2{}^0 = arctg\ \frac{4\pi}{10}$ gegen die Abscissenaxe geneigt gezogene Gerade, entsprechend der Gleichung $H = \frac{4\pi}{10} m_1 J$ (Formel 186) oder $y = Cx$, wenn man $y = H$, $C = \frac{4\pi}{10}$ und $x = m_1 J$ einführt. Wenn man nun auch aus dieser Geraden eine andere in der Art ableitet, daß man anstatt der zusammengehörigen Werthe

$$\begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

die gleichfalls zusammengehörigen Werthe

$$\begin{array}{cccc} Q_3 y_1 & Q_3 y_2 & Q_3 y_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L_3 x_1 & L_3 x_2 & L_3 x_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

als Coordinaten aufträgt, so erhält man eine neue, für einen Luftraum von der Länge L_3 und vom Querschnitte Q_3 geltende Gerade, bei der jede Abscisse die Ampèrewindungenzahl angibt, die erforderlich ist, um die durch die dazugehörige Ordinate vorgestellte Kraftlinienzahl durch den Luftraum von den angegebenen Dimensionen hindurchzutreiben. Diese Gerade ist in Fig. 13 mit III bezeichnet.

Man construire nun noch eine vierte Curve und zwar in folgender Weise. Einer bestimmten Ordinate Z' entspreche in der Curve I die Abscisse x'_{I}, in der Curve II die Abscisse x'_{II} und in der Geraden III die Abscisse x'_{III}. Ebenso seien für die Ordinate Z'' die in den drei Curven dazugehörigen Abscissen x''_{I}, x''_{II} und x''_{III}, ferner für die Ordinate Z''' in der Curve I x'''_{I}, in der Curve II x'''_{II} und in der Geraden III x'''_{III} u. s. w. Zeichnet man nun eine Curve dergestalt, daß man für die Abscisse $x'_{\mathrm{I}} + x'_{\mathrm{II}} + x'_{\mathrm{III}}$ die Ordinate Z', ferner

für die Abscisse $x_I'' + x_{II}'' + x_{III}''$ die Ordinate Z'', dann für die Abscisse $x_I''' + x_{II}''' + x_{III}'''$ die Ordinate Z''' u. s. w. aufträgt, so erhält man eine Curve, bei der jede Abscisse die Anzahl der Ampèrewindungen bedeutet, die erforderlich sind, um die durch die dazu gehörige Ordinate vorgestellte Kraftlinienzahl Z durch ein Ankereisen von der Länge L_1 und dem Querschnitte Q_1, dann durch ein Schenkeleisen von der Länge L_2 und dem Querschnitte Q_2 und auch noch durch einen Luftraum von der Länge L_3 und vom Querschnitte Q_3 hindurchzutreiben. Diese resultirende Curve ist in Fig. 13 durch die Curve IV dargestellt.

Diese Curve kann auch als eine der Gleichung $Z = \Phi(mJ)$ oder $\frac{E}{e} = \Phi(mJ)$ entsprechende Characteristik der betrachteten Dynamomaschine angesehen werden, wobei Φ das Functionszeichen ist und e die bereits angegebene Bedeutung einer Ankerconstante hat, nämlich $e = \frac{Nn}{6.10^9} \cdot$ (119).

Da es nun sehr unbequem wäre, für geänderte Werthe von L_1, Q_1; L_2, Q_2 und L_3, Q_3 immer wieder andere Curven I, II und III aus den Magnetisirungscurven $y = F(x)$, $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ abzuleiten, so zieht man dem soeben beschriebenen graphischen Verfahren den Weg der Rechnung vor, der noch weiter vereinfacht wird, wenn man die Magnetisirungscurven durch Tabellen ersetzt hat, wie z. B. die Tabelle auf S. 44 des Uppenborn'schen Kalenders für 1902, aus der wir nachstehend die zur Erläuterung eines Beispieles erforderlichen Rubriken entnommen haben.

Es sollen die Ampèrewindungen berechnet werden für eine Dynamomaschine von den Dimensionen[1]):

Anker,	$L_1 = 22$ cm;	$Q_1 = 291$ cm²
Schenkel,	$L_2 = 111{,}3$ cm;	$Q_2 = 312$ cm²
Luft,	$L_3 = 0{,}8$ cm;	$Q_3 = 350$ cm²

wobei die L die Längen der Kraftlinienwege und die Q die Querschnitte bedeuten.

Für den Anker sei die Liniendichte $B_1 = 12000$ vorausgesetzt, folglich die Gesammt-Kraftlinienzahl $Z = 12000 \times 291 = 3492000$. — Daraus ergibt sich die Liniendichte im Schenkeleisen $B_2 = \frac{Z}{Q_2} = 11192$, und wenn 30 Proc. Steuerung gerechnet werden, $B_2' = 11192 \times 1{,}3 \doteq 14550$. — Für die Luft (Interferricum) ergibt sich die Liniendichte $B_3 = \frac{Z}{Q_3} = 9977$.

[1]) Zeichnung in E. Schulz, Practische Dynamoconstruction.

Kraftlinien-dichte B	Ampèrewindungen pro Centimeter		
	Luft	deutsches Schmiedeeisen	Flußeisen
1000	800	1,2	0,9
2000	1600	1,7	1,2
3000	2400	2,2	1,5
4000	3200	2,6	1,9
5000	4000	3,2	2,1
6000	4800	3,6	2,5
7000	5600	4,3	2,8
8000	6400	5,1	3,2
9000	7200	5,9	3,7
10000	8000	6,9	4,2
11000	8800	8,2	5,2
12000	9600	10,2	6,7
13000	—	13,0	9,0
14000	—	18,0	12,3
15000	—	30,2	20,0
16000	—	53,0	34,0

Für diese Linienbichten ergeben sich nun aus der vorstehenden Tabelle folgende Ampèrewindungszahlen pro Centimeter. Für den Anker ($B_1 = 1200$) aus der Rubrik Flußeisen $m_1 J = 6{,}7$. — Für den Feldmagnet (deutsches Schmiedeeisen, $B_2' = 14\,550$) durch Interpolation $m_1 J = 18{,}6$ und für den Luftraum ($B_3 = 9977$) durch Interpolation $m_1 J = 7982$. —

Sonach sind mit Rücksicht auf die Längen folgende Ampèrewindungszahlen erforderlich:

Für den Anker	$6{,}7 \times 22$	$\doteq 148$
Für den Feldmagnet . . .	$18{,}6 \times 111{,}3$	$\doteq 2070$
Für den Luftspalt	$7982 \times 0{,}8$	$\doteq 6386$
Im Ganzen also		$mJ = 8604$

Wäre auch der Feldmagnet aus Flußeisen, dann ergäbe sich für dieselbe Linienbichte $B_2' = 14\,550$ durch Interpolation $m_1 J = 12{,}78$ und somit die Zahl der Ampèrewindungen $\doteq 1422$ (anstatt 2070) für das Magneteisen. Die Gesammtzahl der erforderlichen Ampèrewindungen wäre dann 7956 [1]). — Eine nur Flußeisen voraussetzende Berechnung dieser Art findet man in Uppenborn's Kalender (1902, S. 88).

[1]) Diese willkürlich recht einfach angenommenen Beispiele sollen selbstverständlich keine Entwürfe sein, sondern ausschließlich zur Erläuterung des beschriebenen Verfahrens dienen.

Bezeichnet man mit Z_2 die Zahl der im Schenkeleisen erzeugten und mit Z_1 die Zahl der das Ankereisen durchsetzenden Kraftlinien, dann ist

$$c = \frac{Z_2}{Z_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 250)$$

der sogenannte Streuungs-Coëfficient. Dieser kann durch Versuche mit dem ballistischen Galvanometer ermittelt werden, worüber man z. B. in Kittler's Handbuch (I, 662) Näheres findet. Der durch solche Versuche an einer Maschinentype ermittelte Streuungs-Coëfficient kann bei der Berechnung der Ampèrewindungen für neue Maschinen von derselben Type benutzt werden[1]).

Die berechnete Zahl der Ampèrewindungen wäre dann noch wegen der Ankerrückwirkung[2]) entsprechend zu vermehren[3]).

Zur Abschätzung der Wickelungsräume und Widerstände von Drahtspulen sind einige Formeln nützlich, die hier noch Platz finden mögen.

Für die (doppelte) Dicke δ der Ueberspinnung eines Dynamodrahtes gibt Uppenborn[4]) die Formel

$$2\,\delta = 0{,}43 + 0{,}07\,d \quad \ldots \ldots \quad 251)$$

wenn d der Durchmesser des blanken Drahtes ist. Der Durchmesser d' des übersponnenen Drahtes ist demnach

$$d' = 0{,}43 + 1{,}07\,d \quad \ldots \ldots \quad 252)$$

wobei δ, d und d' in Millimetern einzusetzen sind.

Die Höhe h von n über einander liegenden Drahtlagen berechnet Uppenborn[5]) nach der Formel

$$h = 0{,}9\,n\,(d + 2\,\delta) = 0{,}9\,n\,d' \quad \ldots \ldots \quad 253)$$

Für Drahtlänge L und Windungszahl m gibt Du Moncel[6]) Folgendes an.

Bei einer cylindrischen Drahtspule vom inneren Durchmesser c, vom äußeren Durchmesser $c + 2\,a$ und von der Länge b, also vom Querschnitte ab des Wickelungsraumes ist $\frac{a}{d'}$ die Zahl der Drahtlagen[7]), $\frac{b}{d'}$ die Windungszahl

---

[1]) Eine Zusammenstellung solcher Versuchsergebnisse findet man gleichfalls in Kittler's Handbuch (Bd. I, S. 650).

[2]) Ist λ der Winkel der Bürstenverschiebung auf den Radius bezogen, so entspricht die magnetisirende Wirkung des Ankers dem $\frac{2\,\lambda}{\pi}$fachen von der Zahl der Ampèrewindungen der Ankerbewickelung. In vielen Fällen beträgt $\frac{2\,\lambda}{\pi}$ etwa $\frac{2}{9}$.

[3]) Uppenborn, Kalender 1902, S. 88.

[4]) Siehe Uppenborn, Kalender 1902, S. 88.

[5]) Kittler, I, 589.

[6]) Kalender 1894, S. 178.

[7]) Electricity as a motive power, by Count du Moncel and Frank Geraldy. Aus dem Französischen (1883), S. 5.

[7]) Nicht ganz übereinstimmend mit der Annahme von Uppenborn (Formel 253).

einer Lage und also $\frac{a\,b}{d'^2} = m$ die Windungszahl der Spule. Die mittlere Länge $M(u)$ einer Windung ist

$$M(u) = \pi\,(c + a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 254)$$

und die ganze Länge L des aufgewickelten Drahtes

$$L = m\,.\,M(u) = \frac{a\,b}{d'^2} \cdot \pi\,(a + c) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 255)$$

Der Drahtwiderstand r in Ohm einer Spule, deren Wickelungsraum v cm^3 umfaßt, beträgt nach Silv. Thompson[1])

$$r = 0{,}0244\ \frac{v}{d'^2 d^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 256)$$

III. Abschnitt.

Potentialfunction, Niveauflächen und Kraftlinien. Der Begriff 82
der Potentialfunction, von der in diesem Buche öfter die Rede ist, ergibt sich aus folgender Betrachtung.

Wir denken uns, wie Fig. 14 (a. f. S.) andeutet, innerhalb eines abgegrenzten Raumes K ein System von festen Punkten, in denen gewisse Quantitäten $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$ eines wirksamen Agens (wägbare Materie, Electricität oder Magnetismus) concentrirt vorhanden seien und auf eine im beweglichen Punkte A vorhandene und $= 1$ angenommene Quantität desselben Agens abstoßend oder anziehend wirken.

Um von bestimmten Voraussetzungen auszugehen, wollen wir annehmen, daß gleichnamige Electricitäten in den besagten Punkten vorhanden seien und also abstoßend auf einander wirken.

Diese von den electrischen Quantitäten $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$ auf die electrische Quantität 1 im Punkte A ausgeübten Abstoßungskräfte $p_1, p_2, p_3 \ldots$ werden dann nach dem Coulomb'schen Gesetze (§. 5, Formel 4), wenn wir die betreffenden Entfernungen mit $r_1, r_2, r_3 \ldots$ bezeichnen, folgende sein:

$$p_1 = \frac{\mu_1 \times 1}{r_1^2} = \frac{\mu_1}{r_1^2}; \quad p_2 = \frac{\mu_2 \times 1}{r_2^2} = \frac{\mu_2}{r_2^2};$$

$$p_3 = \frac{\mu_3 \times 1}{r_3^2} = \frac{\mu_3}{r_3^2} \text{ u. s. w.}$$

---

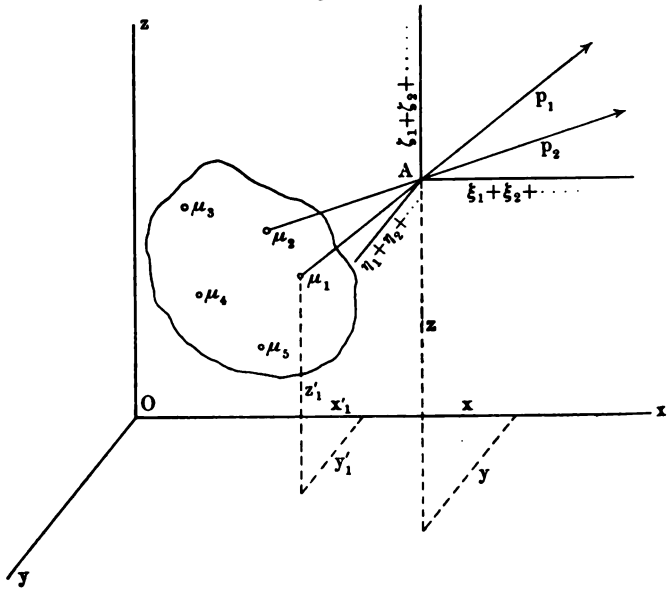
[1]) Cantor Lectures on the electromagnet, p. 63; desgleichen in Dynamo-electric Machinery, 4. edition, p. 430, 431.

Zerlegen wir nun zunächst die erste dieser Kräfte p_1 in ihre den Coo natenaxen parallelen Componenten ξ_1, η_1 und ζ_1, so erhalten wir

$$\xi_1 = \frac{\mu_1}{r_1^2} \cos \alpha_1, \quad \eta_1 = \frac{\mu_1}{r_1^2} \cos \beta_1 \quad \text{und} \quad \zeta_1 = \frac{\mu_1}{r_1^2} \cos \gamma_1,$$

wenn α_1, β_1 und γ_1 die Richtungswinkel der Kraft p_1 mit den drei Coo

Fig. 14.



natenaxen bedeuten. Da nun die Cosinus dieser Winkel durch

$$\cos \alpha_1 = \frac{x - x_1'}{r_1}, \quad \cos \beta_1 = \frac{y - y_1'}{r_1} \quad \text{und} \quad \cos \gamma_1 = \frac{z - z_1'}{r_1}$$

ausgedrückt werden können, wenn x, y, z die Coordinaten von A und x_1', y_1' die Coordinaten von μ_1 sind, so ergeben sich die Ausdrücke

$$\xi_1 = \mu_1 \frac{x - x_1'}{r_1^3}; \quad \eta_1 = \mu_1 \frac{y - y_1'}{r_1^3} \quad \text{und} \quad \zeta_1 = \mu_1 \frac{z - z_1'}{r_1^3}$$

wofür man, da $r_1 = \sqrt{(x - x_1')^2 + (y - y_1')^2 + (z - z_1')^2}$ nach bekannten Regeln der Differentialrechnung, und wenn man zugleich be sichtigt, daß μ_1 constant ist, folgende Gleichungen setzen kann[1]):

[1]) Es ist nämlich

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial x} = -\frac{x - x_1'}{r_1^3}; \quad \frac{\partial \left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial y} = -\frac{y - y_1'}{r_1^3}; \quad \frac{\partial \left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial z} = -\frac{z -}{}$$

$$\xi_1 = -\frac{\partial\left(\frac{\mu_1}{r_1}\right)}{\partial x};\quad \eta_1 = -\frac{\partial\left(\frac{\mu_1}{r_1}\right)}{\partial y} \quad \text{und} \quad \zeta_1 = -\frac{\partial\left(\frac{\mu_1}{r_1}\right)}{\partial z}.$$

In ähnlicher Weiſe findet man für die den Coordinatenaxen parallelen Componenten der Kräfte p_2, p_3 u. ſ. w. die analogen Ausdrücke

$$\xi_2 = -\frac{\partial\left(\frac{\mu_2}{r_2}\right)}{\partial x};\quad \eta_2 = -\frac{\partial\left(\frac{\mu_2}{r_2}\right)}{\partial y};\quad \zeta_2 = -\frac{\partial\left(\frac{\mu_2}{r_2}\right)}{\partial z}$$

$$\xi_3 = -\frac{\partial\left(\frac{\mu_3}{r_3}\right)}{\partial x};\quad \eta_3 = -\frac{\partial\left(\frac{\mu_3}{r_3}\right)}{\partial y};\quad \zeta_3 = -\frac{\partial\left(\frac{\mu_3}{r_3}\right)}{\partial z}$$

. . . . . .

Summirt man nun für jede der drei Coordinatenaxen die ihr parallelen Kraftcomponenten, ſo erhält man zunächſt für die x-Axe

$$X = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \cdots = -\left[\frac{\partial\left(\frac{\mu_1}{r_1}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\mu_2}{r_2}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\mu_3}{r_3}\right)}{\partial x} + \cdots\right]$$

welche Summe wir ſymboliſch mit $-\sum\frac{\partial\left(\frac{\mu}{r}\right)}{\partial x}$ bezeichnen wollen, oder, indem wir anſtatt der Summe der Differentialquotienten aller $\frac{\mu}{r}$ den Differentialquotienten der Summe aller $\frac{\mu}{r}$ einſetzen

$$X = -\frac{\partial\sum\frac{\mu}{r}}{\partial x} \quad \ldots\ldots \quad 257\,\text{I})$$

In ganz analoger Weiſe erhält man für die Geſammtkraftcomponente parallel der y-Axe

$$Y = -\frac{\partial\sum\frac{\mu}{r}}{\partial y} \quad \ldots\ldots \quad 257\,\text{II})$$

und parallel der z-Axe

$$Z = -\frac{\partial\sum\frac{\mu}{r}}{\partial z} \quad \ldots\ldots \quad 257\,\text{III})$$

Die Function $\sum\frac{\mu}{r}$, die offenbar eine Function der Raumcoordinaten (da ja jedes darin vorkommende $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$

eine solche ist), hat also die Eigenschaft, daß ihre negativen Differentialquotienten nach den Richtungen der Coordinatenaxen die diesen Richtungen parallelen Componenten der Kraft ausdrücken, die das betrachtete Agens[1]) auf die in einem bestimmten Punkte vorhandene gleichartige Quantitätseinheit ausübt. Man nennt diese Function die Potentialfunction[2]) des wirksamen Agens im afficirten Punkte, oder oft auch kurzweg das Potential.

Wie schon aus dem Gesagten bei einiger Ueberlegung hervorgeht und leicht auch direct bewiesen werden kann, läßt sich in ebenso einfacher Weise die Kraft S ausdrücken, die im afficirten Punkte nach einer beliebigen anderen Richtung s hin wirksam ist, nämlich

$$S = -\frac{\partial \sum \frac{\mu}{r}}{\partial s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 258)$$

Bezeichnen wir die Potentialfunction, wie es üblich ist, mit V, so erhalten wir die vereinfachten Ausdrücke

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}; \quad S = -\frac{\partial V}{\partial s} \quad 259)$$

Wenn das wirksame Agens nicht in getrennten Punkten μ, wie in Fig. 14 angenommen, angeordnet, sondern stetig einen Raum erfüllend oder auf einer Fläche ausgebreitet vorhanden ist, so hat man es sich in Quantitätselemente dq_1, dq_2, dq_3 ... (anstatt μ_1, μ_2, μ_3 ...) zerlegt zu denken und diese mit ihren Abständen r_1, r_2, r_3 ... vom afficirten Punkte in die Rechnung einzuführen, wobei dann an Stelle der durch das Symbol Σ angedeuteten Summirung eine Integration tritt. Man schreibt also, je nachdem der eine oder der andere Fall zutrifft

$$V = \sum \frac{\mu}{r} \quad \text{oder} \quad V = \int \frac{dq}{r} \quad \ldots\ldots \quad 260)$$

Befindet sich in dem afficirten Punkte nicht die Quantität 1, sondern

---

[1]) Den Ausdruck „Agens" hat Clausius als gemeinschaftliche Bezeichnung nicht nur für die wägbare Materie, Electricität nnd Magnetismus, sondern überhaupt für Alles, was wir uns quantitativ bestimmbar und in die Ferne wirksam denken wollen, eingeführt. (R. Clausius, Die Potentialfunction und das Potential, S. 9.)

[2]) Diese Benennung rührt von Green her. Gauß nannte später dieselbe Function Potential. Clausius hat die Green'sche Benennung beibehalten, indem er das Wort Potential zur Bezeichnung einer Größe gebraucht, die bei der Wechselwirkung zweier Systeme von Quantitäten auf einander oder eines solchen Systems auf sich selbst in Betracht kommt. Ferner betrachtet Clausius die Potentialfunction als die specielle Form, die eine allgemeinere sogenannte Kraftfunction (force function) dann annimmt, wenn die Wechselwirkung zweier Quantitäten des Agens dem Quadrate der Entfernung verkehrt proportional ist, d. i. in Uebereinstimmung mit dem Newton'schen oder Coulomb'schen Gesetze.

eine beliebige andere Quantität q, ſo iſt die in einer beliebigen Richtung s darauf wirkende Kraft

$$S = -q\frac{\partial V}{\partial s}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 261)$$

und dem entſprechend ſind auch die in 259 angeführten Ausdrücke für die anderen Kraftcomponenten mit q zu multipliciren.

Das negative Vorzeichen dieſer Differentialquotienten deutet an, daß die betreffende Kraftcomponente den afficirten Punkt nach der Seite hin antreibt, nach der die Werthe der Potentialfunction abnehmen. Dies gilt für Electricität oder Magnetismus hinſichtlich ihrer Wirkung auf einen gleichnamigen afficirten Punkt, da in dieſem Falle abſtoßende Kräfte wirkſam ſind. Dagegen wird die Kraftcomponente S, mit der wägbare Materie auf die in einem Punkte concentrirte Maſſeneinheit nach einer beliebigen Richtung s des Raumes einwirkt, durch den poſitiven Differentialquotienten der Potentialfunction nach dieſer Richtung ausgedrückt, weil in dieſem Falle anziehende Kräfte, d. h. ſolche wirkſam ſind, die den Abſtand der auf einander wirkenden Maſſentheilchen zu verkleinern ſtreben.

Iſt die Potentialfunction nach einer beſtimmten Richtung des Raumes conſtant, alſo ihr Differentialquotient $= 0$, dann wirkt nach dieſer Richtung keine Kraft.

Denkt man ſich in dem Wirkungsraume eines Agens durch alle Punkte, z. B. $p_1, p_1', p_1'', \ldots$ Fig. 15 (a. f. S.), in denen die Potentialfunction denſelben Werth, z. B. $V = a$ hat, eine Fläche gelegt, ſo erhält man eine ſogenannte Niveaufläche. So ſtellt in Fig. 15 die im Durchſchnitte mit der Zeichnungsebene durch die Curve I dargeſtellte Fläche die durch die Punkte $p_1, p_1', p_1'' \ldots$ gelegte Niveaufläche vor. Die Curven II und III ſind die Durchſchnitte anderer Niveauflächen, von denen wir annehmen wollen, daß ſie den Werthen der Potentialfunction $V = b$ und $V = c$ entſprechen.

Da die Potentialfunction V, wie wir geſehen haben, eine Function der Raumcoordinaten iſt, in der die Coordinaten des afficirten Punktes (wie z. B. die des Punktes A in Fig. 14) als Veränderliche vorkommen, ſo ſind die Gleichungen $V = a$, $V = b$, $V = c$ auch die Gleichungen der Niveauflächen I, II, III, und im Allgemeinen iſt alſo eine Gleichung von der Form

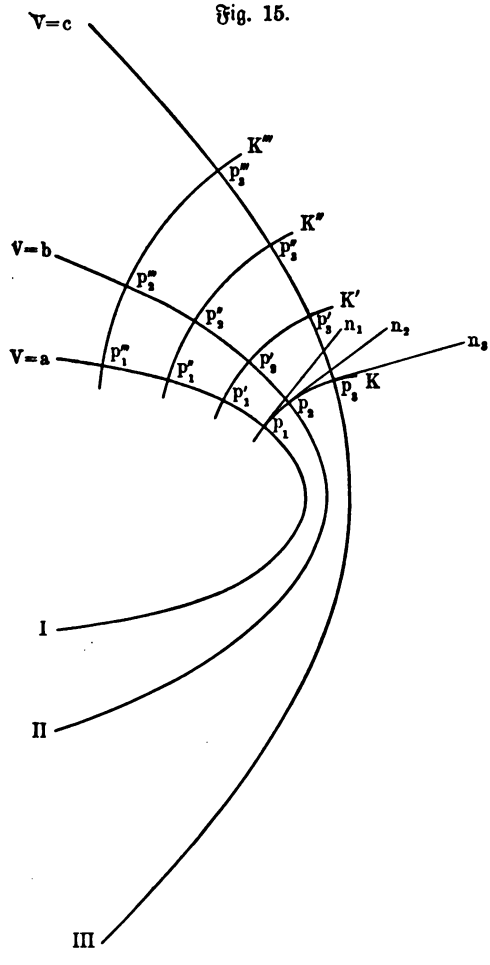
$$V = Const. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 262)$$

die Gleichung einer Niveaufläche.

Es läßt ſich zeigen, daß die Reſultirende aller Kräfte, die im Wirkungsraume eines Agens auf einen afficirten Punkt einwirken, ſtets normal zur Niveaufläche gerichtet iſt, in der ſich der Punkt eben befindet, und zwar nach der Seite der abnehmenden Potentialwerthe hin. Wäre der Punkt frei beweg-

lich und gewichtlos, so müßte er demnach unter der alleinigen Einwirkung des angenommenen Agens eine Bahn beschreiben, die, alle auf einander folgenden Niveauflächen (wie z. B. I, II, III in Fig. 15) normal durchsetzend, als eine orthogonale Trajectorie der Niveauflächen erscheint. Man nennt eine solche Curve, die in jedem ihrer Punkte die resultirende Kraftrichtung (Normale der betreffenden Niveaufläche) zur Tangente hat, eine Kraftlinie. Die Curven K, K', K'' . . . in der Figur stellen Kraftlinien vor.

Fig. 15.



Je rascher längs einer Kraftlinie die Niveauflächen für gleiche Potentialdifferenzen auf einander folgen, desto stärker sind die auf diesem Wege wirksamen Kräfte. Wir wollen bei dem durch Fig. 15 veranschaulichten Falle annehmen, daß die Werthe der Potentialfunction von I bis II, dann von II auf III u. s. w. um gleiche Differenzen abnehmen, daß also $V_a - V_b = V_b - V_c =$ u. s. w. Dann folgt aus der Zeichnung, daß die im Punkte p_1 in der Richtung der Normale n_1 wirksame Kraft größer ist, als die in p_2 in der Richtung n_2 wirksame, weil das Segment $p_1 p_2$ kleiner ist als $p_2 p_3$. Ebenso folgt, daß in p_1' eine kleinere Kraft wirkt als in p_1, weil das Segment $p_1' p_2' > p_1 p_2$. Bezeichnen wir überhaupt die in den mit p bezeichneten Punkten wirksamen Kräfte mit P, so folgt aus dem Gesagten, daß $P_1 > P_1' > P_1'' > P_1'''$, weil $p_1 p_2 < p_1' p_2' < p_1'' p_2'' < p_1''' p_2'''$; ebenso $P_2 > P_2' > P_2'' > P_2'''$, weil $p_2 p_3 < p_2' p_3' < p_2'' p_3'' < p_2''' p_3'''$. Diese Folgerungen er-

geben sich aus der allgemeinen Formel $S = -\frac{\partial V}{\partial s}$ (259), die anzeigt, daß die nach einer beliebigen Richtung s wirkende Kraft desto größer ist, je größer das Potentialgefälle nach dieser Richtung, d. h. je kleiner für ein bestimmtes ∂V das ∂s ist. Diese Formel geht übrigens hier, wo wir stets tangentiell zu den Kraftlinien, also normal zu den Niveauflächen wirkende Kräfte betrachtet haben, über in

$$P = -\frac{dV}{dn} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 263)$$

wobei dn ein Element der Normale im afficirten Punkte p (nach auswärts als positiv gerechnet) und P die Resultirende aller auf den Punkt wirkenden Kräfte des Agens vorstellt.

Die Zeichnung läßt auch erkennen, wie die Kraftlinien, während längs derselben die Kraftintensitäten abnehmen, weiter auseinanderrücken, so, daß die auf die Flächeneinheit treffende Zahl der Kraftlinien abnimmt.

Für ein in einem Punkte M concentrirtes Agens sind die Niveauflächen concentrische Kugelflächen, deren Mittelpunkt M ist, und die Kraftlinien divergiren in der Richtung der Radien, wobei die auf die Flächeneinheit einer Kugeloberfläche treffende Zahl von Kraftlinien mit dem zunehmenden Quadrate des Radius abnimmt. Damit ist auch das im §. 29 angegebene Verfahren begründet, die Feldstärke durch die Zahl der Kraftlinien pro Flächeneinheit darzustellen. Ist nämlich Q die im Punkte M concentrirte Menge des Agens, so ist auf einer Kugeloberfläche vom Radius r die Feldstärke, d. i. die auf eine Quantitätseinheit wirkende Kraft, nach dem Coulomb'schen Gesetze $= \frac{Q}{r^2}$. Stellen wir diese durch ebensoviele Kraftlinien pro Flächeneinheit dar, so erscheint diese Kraftlinienzahl gleich der Kraftintensität dem Radius verkehrt proportional, wie es dem in §. 29 angegebenen Verfahren entspricht.

Auf die Kugeloberfläche vom Radius r treffen nach dem Gesagten $\frac{Q}{r^2} \times 4\pi r^2 = 4\pi Q$ Kraftlinien, folglich ist die Zahl ξ_1 der von einer Quantitätseinheit ausgehenden Kraftlinien

$$\xi_1 = 4\pi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 264)$$

Hieraus haben wir im §. 26 gefolgert, daß, wenn $\pm q$ die in einem Pole eines Magnetstabes concentrirt gedachte Menge von Magnetismus ist, $4\pi q$ die Gesammtzahl der von Pol zu Pol gehenden Kraftlinien sei, wobei wir uns vorstellen, daß diese Kraftlinien außerhalb des Stabes vom Nordpol zum Südpol und innerhalb des Stabes vom Südpol zum Nordpol verlaufen.

Ist also f der Querschnitt des Stabes, so kommen durchschnittlich $4\pi \frac{q}{f}$

Kraftlinien auf die Flächeneinheit desselben, oder auch $4\pi\frac{ql}{fl}$, wobei l die Stablänge bedeuten soll. Wir können dann für ql annähernd [1]) das magnetische Moment M und für fl das Volumen v des Stabes, also für $\frac{ql}{fl}$ annähernd den specifischen Magnetismus s des Stabes setzen. Bezeichnet man also die auf die Flächeneinheit des Stabquerschnittes treffende Zahl von Kraftlinien mit B_0, so ist

$$B_0 = 4\pi s \quad \ldots \quad 266)$$

wie im letzten Absatze des §. 26 bereits erwähnt wurde.

Denkt man sich die in den Polen eines Magnetstabes concentrirt gedachten magnetischen Quantitäten $+q$ und $-q$ auf den zur magnetischen Axe senkrechten Endflächen des Stabes gleichförmig ausgebreitet [2]), so wird dadurch der vorhin angenommene annähernde Werth $M = ql$ des magnetischen Momentes nicht geändert. Es wäre dann auf den Endflächen die Flächendichte $\sigma = \frac{q}{f} = \frac{gl}{fl} = \frac{M}{v} = s$ vorhanden, d. h. wir können die Flächendichte σ unter gewissen Voraussetzungen [3]) durch den specifischen Magnetismus s ersetzen.

Denken wir uns von jeder Quantitätseinheit der Polfläche 4π, also von jeder Flächeneinheit $4\pi\sigma$ Kraftlinien ausgehend, so erhält man, insofern man $\sigma = s$ setzen darf, wieder die durch Formel 266 ausgedrückten $4\pi s$ Kraftlinien, die auf die Flächeneinheit des Stabquerschnittes kommen.

Ein vor der Polfläche befindlicher, mit der magnetischen Quantität 1 begabter Punkt wird in der Richtung der Flächennormale mit einer Kraft F_1

---

[1]) Genauer wäre

$$M = {}^5/_6\, ql \quad \ldots \quad 265)$$

insofern die Poldistanz nahe $= {}^5/_6\, l$ angenommen werden kann. (Vergl. §. 26.)

[2]) Zu dieser Anordnung des freien Magnetismus gelangt man auch, wenn man sich einen Magnetstab in seiner ganzen Masse so gleichförmig magnetisirt denkt, daß er als ein System von lauter geraden, der Axe parallelen, gleich magnetisirten Eisen- (oder Stahl-) fäden betrachtet werden kann. Auch dann würden nur an den Endflächen freie Magnetismen vorhanden sein. In Wirklichkeit wird dies wohl nie zutreffen können, denn die dem wirklichen Magnetisirungszustande äquivalente Anordnung von freiem Magnetismus auf der Oberfläche (§. 65) wird stets so beschaffen sein, daß dieser freie Magnetismus wenn auch größtentheils, doch nicht ausschließlich auf den Endflächen und auch nicht in vollkommen gleichförmiger Vertheilung auf denselben vorhanden sein wird. Die unter den angeführten vereinfachenden Voraussetzungen abgeleiteten Folgerungen können also auch nur mit einer gewissen Annäherung zutreffend sein.

[3]) Macht die Magnetisirungsrichtung (Axenrichtung) mit der Normale der (ebenen) Polfläche einen Winkel ϑ, so ist allgemein

$$\sigma = s\cos\vartheta \quad \ldots \quad 267)$$

Siehe J. Stefan's citirte Abhandlung, S. 93.

angezogen (oder abgestoßen), die gleich ist der Flächendichte σ, multiplicirt mit dem körperlichen Winkel, unter dem die Polfläche von dem afficirten Punkte aus erscheint. Liegt dieser der Fläche unendlich nahe, so umfaßt der besagte Gesichtswinkel eine Halbkugel und die auf den afficirten Punkt wirkende Kraft wird in diesem Falle[1])

$$F_1 = 2\pi\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 268)$$

Befände sich der besagte magnetische Punkt zwischen den zwei einander sehr nahen parallelen Polflächen eines Ringmagneten (oder Hufeisenmagneten mit Polaufsätzen), dann wäre die Kraft, die den Punkt von der einen Polfläche gegen die andere hintreibt, offenbar die doppelte

$$F = 2F_1 = 4\pi\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 269)$$

oder, insofern man $\sigma = s$ setzen kann,

$$F = 4\pi s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 270)$$

nämlich gleich der Feldstärke zwischen den Polflächen, die selbst wieder gleich ist der Zahl der Kraftlinien pro Flächeneinheit (Formel 266), die im Inneren des Stabes verlaufen und, wenn die Polflächen einander so nahe sind, daß keine Streuung stattfindet, auch zwischen diesen übergehen.

Das Maximum dieser Zahl von Kraftlinien beträgt, wenn man das Maximum von s nach dem Vorhergehenden

$$\bar{s} = 1653$$

annimmt, in runder Zahl

$$\bar{F} \doteq 21000.$$

Diese Feldintensität zwischen parallelen Polflächen läßt sich, wie J. Stefan[2]) gezeigt hat, ohne Beschränkung der axialen Ausdehnung des Feldes steigern, wenn man zwei einander gegenüber liegende conaxiale Cylinder, die in abgestutzte Kegel endigen, als Polschuhe anwendet.

Die Verstärkung des Feldes wird am größten, wenn die Erzeugungslinien der beiden Kegelflächen durch den Mittelpunkt des Feldes gehen und mit der Axe einen Winkel bilden, dessen Tangente $= \sqrt{2}$ ist. In diesem Falle ist

$$F = 4\pi s \left[0{,}289 + 0{,}886\ log\frac{d}{a}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 271)$$

wobei d den Durchmesser der Cylinder, a den Abstand der ebenen Endflächen, also die Länge des magnetischen Feldes, und *log* den decadischen Logarithmus bedeuten. Soll die Klammergröße $= 2$, also $F = 8\pi s$ werden, so hätte

[1]) Siehe J. Stefan, Ueber die Tragkraft der Magnete, S. 92.

[2]) J. Stefan, Ueber die Herstellung intensiver magnetischer Felder. Sitzungsberichte d. Wiener Academie, Bd. 97 (1888), S. 176. — Siehe auch: Academischer Anzeiger, 9. Febr. 1888.

man $d = 85a$ zu machen. Man sieht hieraus, daß bald Constructionsbedingungen sich ergeben, die nicht ausführbar sind und deßhalb das beschriebene Verfahren zur Verstärkung des magnetischen Feldes practisch nicht viel zu bedeuten hat[1]).

Bei den neueren Dynamomaschinen[2]) beträgt die Kraftlinienzahl pro Quadratcentimeter im Luftraume Tausende. So z. B. bei den Ganz'schen Deltamaschinen (1500 bis 45 000 Watt) 6000 bis 6850 an den Polflächen. Eine größere Dichte der Kraftlinien (etwa die anderthalbfache bis doppelte) ist im Schenkeleisen, und eine noch größere (etwa die doppelte bis dreifache) im Ankereisen vorhanden. Die Ganz'schen Deltamaschinen haben im Schenkeleisen (ohne Rücksicht auf Streuung) 10 100 bis 11 500 und im Ankereisen 13 600 bis 14 700 Kraftlinien pro Quadratcentimeter.

Nehmen wir an, das Ankereisen wäre Schmiedeeisen, das Schenkeleisen aber Gußeisen, so wären die entsprechenden größten Dichten der Kraftlinien ($4\pi\bar{s}$, Formel 266) nach den Angaben, die Kapp für die von ihm verwendeten Eisensorten macht[3]), 24 000 und 16 700, also die höchsten den vorstehenden Angaben für die Ganz'schen Maschinen entsprechenden Sättigungsgrade ungefähr $= 2/3$. Bei Ueberschreitung dieses Sättigungsgrades nimmt der magnetische Widerstand des Eisens schon rasch zu, und also auch die zu einer weiteren Steigerung der Kraftlinienzahl erforderliche Vermehrung der magnetisirenden Ampère-Windungen.

83 **Electrische Flächendichte.** Bezeichnen wir ein Element der Oberfläche eines Leiters, auf dem sich Electricität im Gleichgewichte befindet, mit $d\sigma$ und ist $h\,d\sigma$ die auf diesem Oberflächenelemente befindliche Electricitätsmenge, so nennt man h, als die auf die Flächeneinheit bezogene Electricitätsmenge, die electrische Flächendichte daselbst. Denken wir uns die Electricität in einer Schichte von sehr geringer, aber endlicher Dicke e auf der Oberfläche des Leiters ausgebreitet und nennen wir die Dichte der Electricität in einem beliebigen Abstande zwischen 0 und e von dem betrachteten Oberflächenelemente k, dann können wir die Flächendichte auch so definiren:

$$k = \int_0^e k\,dn \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 272)$$

[1]) J. Stefan, Sitzungsberichte d. Wiener Academie, Bd. 97 (1888), S. 179.

[2]) Wir setzen hier nur zweipolige Dynamomaschinen voraus und benutzen die in den Werken von Kapp und Kittler enthaltenen und die von der Firma Ganz & Co. gefälligst mitgetheilten Angaben (1891).

[3]) G. Kapp, Electric transmission of energy. 3. Aufl. (1891), S. 120. Nämlich beziehungsweise 26 und 18 Kapp-Linien auf den englischen Quadratzoll, d. i. beziehungsweise 24 180 und 16 740 C-G-S-Linien auf das Quadratcentimeter.

wenn wir ein Element der auf dem betrachteten Oberflächenelemente errichteten Normale mit dn bezeichnen und die Richtung nach außen als die positive ansehen. Zwischen dieser Flächendichte und der in der Richtung der Normale wirkenden Intensität $-\frac{dV}{dn}$ des electrischen Feldes besteht dann die Beziehung

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_e = -4\pi h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 273)$$

wobei der Stellenzeiger e bedeutet, daß als Werth des Differentialquotienten jener zu gelten hat, der dem Punkte entspricht, in dem die Normale die äußere Begrenzung der electrischen Schichte von der Höhe e durchsetzt [1]).

Absolutes Electrometer. Auf eine in dem Austrittspunkte einer 84
Oberflächennormale eines geladenen Leiters aus der electrischen Schichte angenommene Quantitätseinheit wirkt nach außen eine Kraft, die in Uebereinstimmung mit Formel 263 durch $-\left(\frac{dV}{dn}\right)_e$ ausgedrückt wird, und auf die electrische Schichte daselbst ein nach außen gerichteter Druck, der, auf die Flächeneinheit bezogen und in Dynen ausgedrückt, den Werth $p = 2\pi h^2$, also mit Rücksicht auf Formel 273 den Werth

$$p = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{dV}{dn}\right)_e^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 274)$$

hat [2]).

Dieser Druck wirkt dem Drucke der Luft, die den geladenen Leiter isolirend umgibt, entgegen und bewirkt auf diesem eine nach außen gerichtete „Oberflächenspannung", die z. B. an einer electrisirten Seifenblase eine kleine Ausdehnung derselben bewirkt, die bei der Entladung der Seifenblase wieder rückgängig wird [3]).

Auf dem in der Formel 274 ausgedrückten Principe beruht auch die Messung von Potentialdifferenzen mit Hilfe des W. Thomson'schen absoluten Electrometers. Ueber einer festgestellten horizontalen, kreisförmigen Metallplatte A befinde sich, zu dieser parallel, eine andere bewegliche B, an einem Wagebalken äquilibrirt. Die untere Platte A sei mittelst einer feinen Be-

[1]) Siehe E. Mascart, Handbuch der statischen Electricität, übersetzt von J. G. Wallentin, Bd. 1 (1883), S. 317. Vergl. Riemann (Hattendorff), Schwere, Electricität und Magnetismus (1876), S. 183, Formel 8. — Briot (Weber), Lehrbuch der mechanischen Wärmetheorie (1871), S. 233 und 234.

[2]) Der Ausdruck $p = 2\pi h^2$ ist dem für magnetische Kräfte geltenden der Formel 170 analog.

[3]) W. Thomson, Reprint of papers on electrostatics and magnetism, 2. Auflage (1884), S. 257.

wegung verstellbar, um den Abstand a von der oberen Platte verändern zu können. Ertheilt man der unteren Platte A eine electrische Ladung vom Potentialwerthe V_1, während man die obere äquilibrirte Platte B zur Erde abgeleitet, also auf dem Potential $V = 0$ läßt, so wird diese von der unteren Platte A angezogen werden und man muß in die am anderen Ende des Wagebalkens befindliche Wagschale ein entsprechendes Gewicht G legen, um die horizontale Stellung des Wagebalkens, also auch den ursprünglichen Abstand a zwischen den Platten A und B wieder herzustellen. Verbindet man dann die obere Platte B mit dem electrischen Körper, dessen Potential V gemessen werden soll, so wird nunmehr, wenn man die Ladung von A von vornherein so gewählt hat, daß sie mit jener von B das entgegengesetzte Vorzeichen hat, eine verstärkte Anziehung zwischen beiden Platten stattfinden, und man wird durch Tieferstellen der Platte A den Abstand a um einen gewissen Betrag vergrößern und z. B. $= b$ machen müssen, um die ursprüngliche Stellung des Wagebalkens ohne Aenderung seiner Belastung abermals herzustellen. Sind die Abstände a und b sehr klein, so kann man die zwischen den Platten B und A bestehende Potentialdifferenz ($0 - V_1$ oder $V - V_1$), dividirt durch den Abstand (a oder b) der beiden Platten, anstatt des Differentialquotienten $\frac{dV}{dx}$ in die Formel 274 einsetzen. Wenn man ferner das in Grammen gegebene Gewicht G durch Multiplication mit 981 auf Dynen umrechnet und, um den auf die Flächeneinheit reducirten Druck p der Formel 274 zu erhalten, durch die Flächengröße f der Platte B[1]) dividirt, so kommt man auf die beiden Gleichungen

$$0 - V_1 = a\sqrt{\frac{8\pi \times 981\, G}{f}} \quad \text{und} \quad V - V_1 = b\sqrt{\frac{8\pi \times 981\, G}{f}} \qquad 275\ \text{I u. II})$$

woraus folgt:

$$V = (b - a)\sqrt{\frac{8\pi \times 981\, G}{f}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 276)$$

Handelt es sich also um die Messung des Unterschiedes der Potentiale auf zwei Leitern, die man mit je einer der beiden Platten des Electrometers verbunden hat, so erhält man diese nach Formel 275 II, wenn bei der Plattendistanz b die Gewichtsdifferenz G zur Ausgleichung erforderlich war.

---

[1]) Diese an einem Wagebalken aufgehängte kreisförmige Scheibe B ist kleiner, als die festgestellte A und befindet sich, frei schwebend, in einem kreisförmigen Ausschnitte einer mit A gleich großen und parallelen, feststehenden Scheibe, die die Platte B als sogenannter „Schutzring" umrahmt. Die Platte B ist bei horizontaler Stellung des Wagebalkens mit dem sie umgebenden Schutzringe in einer Ebene und kann sich durch denselben mit geringem Spielraume hindurch bewegen.

Den so ermittelten Potentialwerthen liegt die absolute electrostatische Einheit zu Grunde, die 300 Volt ausmacht.

Leitet man die untere Platte des Electrometers zur Erde ab und verbindet die obere mit dem positiven Pole einer aus vielen Elementen bestehenden Daniell'schen Batterie, deren negativer Pol ebenfalls zur Erde abgeleitet ist, so findet man die in electrostatischen Einheiten ausgedrückte electromotorische Kraft E der Batterie gegeben durch die Gleichung

$$E = a\sqrt{\frac{8\pi \times 981\, G}{f}} = 157\, a\sqrt{\frac{G}{f}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 277)$$

wenn G das bei der Plattendistanz a erforderliche Ausgleichungsgewicht ist und f die bereits erörterte Bedeutung hat. Man kann auf diese Art einen sehr genauen Mittelwerth für die electromotorische Kraft D eines einzigen Daniell'schen Elementes finden. Man fand für D Werthe zwischen 0,00296 und 0,0037 [1]).

Aus dem von mir in absoluten electromagnetischen Einheiten gefundenen Werthe 108 800 000 = 1,088 Volt ergäbe sich

$$D = 0{,}003\,627 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 278)$$

in electrostatischem Maße [2]). F. Exner [3]) fand $D = 0{,}00325$. — Ertheilt man den Electrometerplatten eine der electromotorischen Kraft von 1000 Daniell gleiche Potentialdifferenz, so beträgt deren gegenseitige electrische Anziehung bei 1 Millimeter Plattendistanz 3,57 oder 5,7 Gramme pro Quadratdecimeter, je nachdem man $D = 0{,}00296$ oder $D = 0{,}0037$ der Rechnung zu Grunde legt. Diese electrische Anziehung ist nach Versuchen, die Macfarlane in W. Thomson's Laboratorium (1856) ausgeführt hat, ziemlich genau dem Quadrate der Anzahl der angewendeten Elemente proportional [4]). Dies entspricht ja auch der aus 277 hervorgehenden Formel

$$G = \frac{f}{(157\, a)^2} \cdot E^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 279)$$

Funken und Lichtbogen. Aus Versuchen, die Smith und Ferguson 85
im Laboratorium von W. Thomson ausgeführt haben (1859 und 1860) und bei denen die zwischen einer ebenen und einer darunter befindlichen, sehr

---

[1]) W. Thomson, Reprint of papers on electrostatics and magnetism, 2. Auflage (1884), S. 249.

[2]) Wenn man das Verhältniß v (Formel 153) $= 3 . 10^{10}$ annimmt, also $1\ (C^{1/2}\, G^{1/2} S^{-1})$ (electrostatisches Maß) = 300 Volt.

[3]) In der Abhandlung: Bestimmung des Verhältnisses zwischen electrostatischer und electromagnetischer absoluter Einheit. Sitzungsber. d. Wiener Academie, Bd. 86 (1882). Das Verhältniß v fand F. Exner $= 3.01 \times 10^{10}$.

[4]) W. Thomson, Reprint of papers etc., 2. Aufl., S. 247.

schwach convexen Platte durch bestimmte Potentialdifferenzen bei genau gemessenen Plattendistanzen hervorgebrachten Funken beobachtet wurden, hat W. Thomson die Schlußfolgerung abgeleitet, daß eine Daniell'sche Batterie von 5510 Elementen bei einer Plattendistanz von $^1/_8$ Centimeter in gewöhnlicher atmosphärischer Luft einen Funken hervorbringen kann. Es hat sich nämlich ergeben, daß der Quotient $R = \frac{E}{s}$, wobei E die mit Hilfe des Electrometers nach Formel 277 ermittelte Potentialdifferenz an den Electrodenplatten ist[1]), für die Plattendistanz (Funkenlänge) $s \gtrless {}^1/_8$ cm sehr nahe den constanten Werth 130 hat, woraus folgt $E = \frac{130}{8} = 16{,}25$ in absoluten electrostatischen Potentialeinheiten. Dieser Werth entspricht 5510 Daniell'schen Elementen, wenn man die electromotorische Kraft eines solchen Elementes $= 0{,}002\,9\underline{5}$ annimmt.

Nach Formel 274 beträgt dann die Oberflächenspannung auf ein Quadratdecimeter und in Grammen ausgedrückt

$$P = \frac{100\,p}{g} = \frac{100\,R^2}{8\pi g} = \frac{100\,R^2}{8\pi \times 981} = 0{,}004\,R^2,$$

also für $R = 130$, $P = 68$. — Diese wirkt dem atmosphärischen Drucke von 103 340 Grammen pro Quadratdecimeter entgegen.

Bei diesen Versuchen hat sich auch die unerwartete Erscheinung ergeben, daß für kleinere Werthe von s größere Werthe von R (z. B. für $s = 0{,}0127$, $R = 260$) erforderlich waren. Es ist damit die Thatsache festgestellt, daß eine dünne Luftschichte dem durchbrechenden Funken mehr Widerstand leistet als eine dicke[2]).

Die zur Erzeugung einer gewissen Funkenlänge erforderliche Potentialdifferenz ist, wie z. B. auch die Versuche von Dr. Warren de la Rue und Dr. Hugo W. Müller[3]) gezeigt haben, in sehr hohem Grade von der Gestalt der Electroden abhängig. Wir wollen hier drei Fälle unterscheiden. 1) Beide Electroden sind paraboloische Spitzen. 2) Eine Electrode ist eine paraboloische Spitze, die andere eben. 3) Beide Electroden sind parallele Ebenen. Nach den Versuchen der genannten Physiker, die mit einer Chlorsilberbatterie von 11000 und noch mehr Elementen (à 1,03 Volt) experimentirten[4]),

---

[1]) Der Quotient $\frac{E}{s}$ vertritt hier, da s verhältnißmäßig klein ist, die Stelle des in der Formel 273 gegebenen Differentialquotienten.

[2]) W. Thomson, Reprint of papers etc., 2. Aufl., S. 252.

[3]) Centralbl. f. Electrotechnik, Bd. 6 (1884), S. 201.

[4]) Everett, Units and Physical Constants, S. 142.

kann man sagen, daß z. B. eine Schlagweite von $^1/_2$ cm im ersten Falle circa 5000 Volt, im zweiten circa 6000 und im dritten circa 15 000 erfordert.

In einem lehrreichen Vortrage: „Ueber die Grundbegriffe der Electrostatik" von E. Mach wird beispielsweise eine Potentialdifferenz von 110 nach electrostatischem Maße (also 33 000 Volt) als einer Schlagweite von 1 cm entsprechend angeführt [1]).

Selbstverständlich ist bei den vorhin erwähnten Versuchen mit Batterien nur von Schließungsfunken, nicht von Oeffnungsfunken die Rede. Letztere entstehen bei der Unterbrechung eines Stromkreises (z. B. auch nur eines einzigen galvanischen Elementes) und können bei starken Strömen zu einem sogenannten Lichtbogen (wie z. B. in der Bogenlampe) ausgedehnt werden. Dabei sind viel geringere Spannungen erforderlich, als zur Hervorbringung eines Schließungsfunkens.

Uppenborn [2]) gibt z. B. folgende zusammengehörige Werthe von Stromstärken J in Ampère, Polspannungen δ in Volt, Lichtbogenlängen L in Millimetern und maximale Lichtstärken HE in Hefner'schen Einheiten. Dabei ist zu bemerken, daß die Hefner'sche Lichtstärkeneinheit der Helligkeit einer 40 mm hohen Amylacetatflamme an einem 8 mm dicken Dochte entspricht.

Gleichstrom				Wechselstrom			
J	δ	L	HE	J	δ	L	HE
8	44,4	2,5	1070	6	27	1,5	220
9	44,8	2,8	1270	8	28	1,6	330
10	45,2	3	1480	10	28	1,7	450
12	46	3,5	1950	12	28	1,8	590
14	46,5	3,8	2400	14	29	1,9	740
16	47	4	2950	16	29	2,0	900
18	47,5	4,3	3450	18	30	2,2	1050
20	48	4,5	4000	20	30	2,3	1220
25	49	5	5500	25	30	2,4	1630
30	50	5,4	7200	30	32	2,5	2070

Indem wir wieder auf die Schließungsfunken zurückkommen, mögen noch die in einem Aufsatze von A. Koepsel [3]) besprochenen Versuche von Mascart erwähnt werden. Diese wurden mit Funkenstrecken von 0,1 bis 15 cm zwischen zwei Kugeln von 22 mm Durchmesser ausgeführt. Als Electricitätsquelle diente eine Holtz'sche Maschine. Nachstehend folgen einige zusammen-

[1]) Zeitschr. d. electrotechnischen Vereins in Wien, Jahrg. 1883, S. 347.
[2]) Kalender für Electrotechniker. 1902, S. 133 und 134.
[3]) Electrotechnische Zeitschrift, Bd. 10 (1889), S. 476.

gehörige Werthe von Funkenlängen in Centimetern und Potentialdifferenzen in Volt[1]):

Funkenlänge	Potentialdifferenz	Funkenlänge	Potentialdifferenz
0,1	5 490	5,0	94 800
0,5	26 730	10	119 100
1,0	48 600	12	124 200
1,5	57 000	15	127 800
2,0	64 800		

Diese Versuche im Vergleiche mit den W. Thomson'schen zeigen zunächst die Abhängigkeit der Funkenlänge von der Form der Electroden. Nach W. Thomson sind für eine Funkenlänge von $^1/_8$ cm zwischen zwei Platten $16{,}25 \times 300 = 4875$ Volt Spannung erforderlich, während bei den Mascart'schen Versuchen eine Potentialdifferenz von 5496 Volt zwischen zwei Kugeln eine Funkenlänge von nur $^1/_{10}$ cm bewirkte. Ferner ist ersichtlich, daß die Entladungsspannungen langsamer wachsen als die Funkenlängen, und daß dieses Zurückbleiben bei wachsender Funkenlänge in immer größerem Maße zum Ausdrucke kommt. Man hat diesen Zusammenhang auch durch Formeln darzustellen versucht, nach denen die Entladungsspannung, als Function der Funkenlänge betrachtet, asymptotisch einem maximalen Grenzwerthe sich nähert.

86 **Condensator.** Zu §. 35 ist zunächst noch der Nachweis zu liefern, daß die Formel 92 für einen Cylindercondensator mit der Formel 91 für einen Plattencondensator gleichlautend wird, wenn man die Dicke $d_2 - d_1 = 2e$ des Diaphragmas sehr klein annimmt und also annähernd $L\pi d_1 = a$ als Belegfläche einsetzt.

---

[1]) Ich entnehme diese Zahlen dem citirten Aufsatze von A. Koepsel, der Mascart's Traité d'électricité statique als Quelle anführt. Die deutsche Uebersetzung dieses Werkes enthält auf S. 106 und S. 84 des zweiten Bandes eine unrichtige Definition der Gaußischen Quantitätseinheit, somit auch der Gaußischen Potentialeinheit und in Folge dessen unrichtige Umrechnungen der von W. Thomson mitgetheilten Zahlen. Dasselbe gilt vom französischen Original (1876), S. 91 und S. 72. Mascart nimmt nämlich die vermeintlichen Gaußischen Einheiten für Quantität und Potential $\sqrt{9810}$ mal, also circa 100 mal zu groß an, indem er die Gaußische Krafteinheit mit dem Milligramm verwechselt. In Folge dessen rechnet er aus den W. Thomson'schen Versuchen Potentialwerthe, die zwar nicht dem Gaußischen System, wohl aber sehr nahe dem C-G-S-System entsprechen. — Für 1 mm Funkenlänge gibt Mascart (Uebersetzung II, S. 108) die Potentialdifferenz 18,5 (vermeintlich in Gaußischen Einheiten) an, was mit Rücksicht auf den angegebenen Irrthum corrigirt $18{,}32\ C^{1/2} G^{1/2} S^{-1}$ oder 5496 Volt ausmacht.

Die Formel 92 ist $K = \frac{Li}{2\,M\,log\,\frac{d_2}{d_1}}$, wobei M den Modulus des natürlichen Logarithmensystems bedeutet, also $M = 2{,}30258\ldots$

Nun kann man $log\,\frac{d_2}{d_1}$ nach der Formel[1])

$$log\,z = 2\,m\left[\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^1 + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\right] \quad 280)$$

entwickeln, wobei m der Logarithmus des gemeinten Logarithmensystems, also $m = \frac{1}{M} = 0{,}434\ldots$ ist, und $z = \frac{d_2}{d_1}$ angenommen wird. Beschränkt man die Entwickelung auf das erste Glied, so erhält man

$$log\,\frac{d_2}{d_1} = 2\,m\,\frac{d_2 - d_1}{d_2 + d_1}.$$

Ist nun, wie vorausgesetzt, $d_2 - d_1 = 2\,e$ sehr klein, so kann man annähernd

$$log\,\frac{d_2}{d_1} = 2\,m\,\frac{2\,\delta}{2\,d_1} = 2\,m\,\frac{\delta}{d_1}$$

setzen und erhält nach Formel 92 den Ausdruck

$$K = \frac{Li}{2\,M\,.\,2\,m\,\frac{\delta}{d_1}} = \frac{L\,i\,d_1}{4\,\delta},$$

da $Mm = 1$ ist. Multiplicirt man endlich noch im Zähler und Nenner mit π und setzt $L\,.\,\pi\,d_1 = a$, so erhält man $K = \frac{a\,i}{4\,\pi\,\delta}$, übereinstimmend mit der Formel 91 für den Plattencondensator.

Auch die Formel 90 für den Kugelcondensator $K = \frac{r_2\,.\,r_1\,i}{r_2 - r_1}$ geht in die für den Plattencondensator über, wenn man bei einem sehr dünnen Diaphragma $r_2\,r_1 = r^2$ einsetzt. Führt man auch hier die Bezeichnung $r_2 - r_1 = \delta$ ein, multiplicirt Zähler und Nenner mit $4\,\pi$ und setzt $4\,\pi\,r^2 = a$, so erhält man wieder $K = \frac{a\,i}{4\,\pi\,\delta}$.

Vertheilungszahl oder Dielectricitätsconstante, auch specifische Inductions- 87
capacität genannt. Wir haben diese Größe im §. 35 bereits erwähnt und

[1]) Die Ableitung dieser Formel findet man in meinem Grundriß der mechanischen Physik S. 13.

kommen hier noch einmal darauf zurück, um einige Zahlenwerthe für verschiedene Materialien, die allenfalls als Diaphragmen von Condensatoren dienen könnten, anzuführen.

Faraday hat zuerst beobachtet, daß die Capacität eines Condensators nicht nur von den Abmessungen, von der Form und gegenseitigen Anordnung der einander gegenüberstehenden Leiter („Belegungen"), sondern auch von der materiellen Beschaffenheit der Zwischenschichte (des „Diaphragmas") abhängt. Wird ein bestimmter Condensator das eine Mal mit Luft, das andere Mal mit einer anderen Substanz als Zwischenschicht untersucht, so ergeben sich in beiden Fällen verschiedene Capacitäten K und K' und man nennt die Größe

$$i = \frac{K'}{K} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 281)$$

die Vertheilungszahl oder Dielectricitätsconstante der anstatt Luft als Zwischenschicht verwendeten Substanz, indem man also der Luft die Vertheilungszahl $i = 1$ beilegt. Wäre z. B. bei einem Plattencondensator das eine Mal Luft und das andere Mal Hartgummi (Ebonit) als Zwischenschicht von gleicher Dicke in Verwendung, so würde der Hartgummicondensator eine etwa $2^1/_2$fache Capacität im Vergleiche mit dem Luftcondensator besitzen. Hieraus ergäbe sich also für Hartgummi die Vertheilungszahl

$$\frac{K'}{K} = i = 2{,}5.$$

Wüllner[1]) fand dafür Werthe von 2,055 bis 2,636; Schiller 2,21; Gordon 2,28; Winkelmann 2,72; Elsaß 2,86; Boltzmann 3,15. — Noch mehr weichen die für die Vertheilungszahl des Schwefels und auch die für die Vertheilungszahl verschiedener Glassorten gefundenen Werthe von einander ab. So z. B. für Schwefel 1,71 (Gaugain); 1,81 (Rosetti); 2,3 (J. J. Thomson); 2,58 (Gordon); 2,52 bis 2,64 (Wüllner); 3,90 (Boltzmann); 4,0 (Curie). Die für verschiedene Glassorten gefundenen Werthe liegen etwa zwischen 1,76 (Faraday) und 10,1 (J. Hopkinson); dieser fand nämlich für Flintglas 6,57 bis 10,1; für hartes Crownglas 6,96 und für Tafelglas 8,45. Wüllner erhielt für ein sehr gut isolirendes Glas 3,676 und für Tafelglas 4,850 bis 5,112. Winkelmann für bleifreies und für stark bleihaltiges Glas die wenig verschiedenen Werthe 7,11 und 7,44. — Für Paraffin erhielt Schiller als kleinsten Werth 1,68 und Boltzmann als größten Werth 2,32; Wüllner 1,964; Gordon 1,994; J. Hopkinson 2,29. — Für paraffinirtes Papier aber muß man, wie ich bereits dargelegt

[1]) Lehrbuch der Experimentalphysik, 5. Aufl., 3. Band (1897), S. 337. — Auch die anderen für die Dielectricitätsconstante hier angeführten Zahlenwerthe sind größtentheils diesem Buche entnommen; theilweise auch von Jenkin und Frölich.

habe (§. 47), einen viel größeren Werth der Vertheilungszahl (etwa $i = 8$) annehmen, um die für Paraffincondensatoren gefundenen Capacitätswerthe mit den berechneten in Einklang zu bringen.

Geringer sind die Abweichungen der von verschiedenen Physikern ermittelten Vertheilungszahlen für Kautschuk: 2,12 (Schiller) bis 2,22 (Gordon); für vulcanisirten Kautschuk: 2,50 (Gordon) bis 2,69 (Schiller) und für Wachs: 1,86 (Harris) bis 2,21 (Gaugain). — Für Guttapercha fand Gordon 2,46, während Frölich 4,2 dafür angibt. Für Glimmer findet man bei Frölich und Jenkin 4,0 bis 5,0 angegeben.

Ladung und Entladung eines Condensators. Wirkt an den Klemmen 88
eines Apparates, der nebst einem gewissen vorgeschalteten Leitungswiderstande R einen Condensator von der Capacität K enthält, eine constante Potentialdifferenz e (von einer constanten Stromquelle, z. B. einem Accumulator herrührend), so wird der nicht geladene Condensator geladen und dabei scheinbar [1]) von einem electrischen Strome, dessen augenblicklicher Werth mit i bezeichnet werden mag, durchsetzt werden. Nach Maßgabe dieses sogenannten Ladestromes findet im Widerstande R ein gewisser Spannungsverlust Ri statt. Außerdem hat die constante electromotorische Kraft e (die sogenannte Ladespannung) auch noch die bei fortschreitender Ladung wachsende electromotorische Gegenkraft v des Condensators zu überwinden und es besteht demnach zunächst die Gleichung

$$e = Ri + v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 282\text{ [2])}$$

Besitzt nun der Condensator in diesem Augenblicke die Ladung q, so hat die Potentialdifferenz v nach Formel 87 gleichzeitig den Werth $v = \frac{q}{K}$. Da nun anderseits die Stromintensität durch die in der Zeiteinheit durch den Leiterquerschnitt gehende Electricitätsmenge, also durch die Gleichung $i = \frac{dq}{dt}$ gegeben ist, geht die Gleichung 282 über in

$$e = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 283)$$

Durch beiderseitige Multiplication mit K erhält man

---

[1]) Der wirkliche Vorgang ist bekanntlich der, daß für jede der einen Belegung des Condensators zufließende positive Electricitätsmenge eine gleich große, ebenfalls positive Electricitätsmenge als frei werdende Influenzelectricität von der anderen Belegung abfließt, gerade so, als wenn die der ersten Belegung zugeflossene Electricitätsmenge durch den Condensator gegangen wäre. Das Analoge gilt von einer zufließenden negativen Electricitätsmenge. Man nennt die beschriebene Electricitätsbewegung wohl auch einen Verschiebungsstrom.

[2]) Vergl. Formel 429.

$$Ke = KR\frac{dq}{dt} + q,$$

wobei Ke im Sinne der Formel 87 offenbar die Electricitätsmenge Q vorstellt, die der Condensator als Ladung aufgenommen haben wird, sobald das Ladepotential $v = e$ geworden ist. Es besteht demnach die Gleichung

$$Q = KR\frac{dq}{dt} + q$$

aus der

$$\frac{dt}{KR} = \frac{dq}{Q-q} = -\frac{d(Q-q)}{Q-q}$$

hervorgeht. Durch Integration erhält man:

$$\varepsilon^{-\frac{t}{KR}} = C(Q-q),$$

wobei ε die Basis des natürlichen Logarithmensystems ($\varepsilon = 2{,}71828\ldots$)[1]) und C eine noch zu bestimmende Integrationsconstante bedeuten. Zu diesem Zwecke erwägen wir, daß für $t = 0$ (Beginn der Ladung) $q = 0$ ist, somit $1 = CQ$ und demnach $C = \frac{1}{Q}$ sein muß, also

$$\varepsilon^{-\frac{t}{KR}} = \frac{Q-q}{Q} = 1 - \frac{q}{Q},$$

woraus man endlich für die zur Zeit t nach Beginn der Ladung vom Condensator aufgenommene Electricitätsmenge

$$q = Q\left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{KR}}\right) \quad \ldots\ldots\ 284)$$

erhält.

Für den Fall der Entladung hat man, da die Ladespannung e fortgenommen wird, in der Gleichung 283 $e = 0$ zu setzen, wodurch man dann $-\frac{dt}{KR} = \frac{dq}{q}$ und durch Integration $\varepsilon^{-\frac{t}{KR}} = Cq$ erhält, wobei C wieder eine Integrationsconstante ist, deren Werth sich aus der Erwägung ergibt, daß der Condensator im Augenblicke der beginnenden Entladung ($t = 0$) noch seine volle Ladung ($q = Q$) hatte, folglich $1 = CQ$ und $C = \frac{1}{Q}$ sein muß, woraus für den zur Zeit t nach Beginn der Entladung noch vorhandenen Ladungsrest der Betrag

$$q = Q \cdot \varepsilon^{-\frac{t}{KR}} \quad \ldots\ldots\ 285)$$

sich ergibt.

[1]) Sonst gewöhnlich mit e bezeichnet.

Die Ausdrücke 284 und 285 lassen erkennen, daß theoretisch unendlich lange Zeiten ($t = \infty$) erforderlich wären, um $\varepsilon^{-\frac{t}{KR}} = 0$ zu machen und damit den Vorgang der Ladung (284) oder Entladung (285) vollständig zum Abschlusse zu bringen. Die Berechnung von Zahlenbeispielen zeigt aber auch, daß diese Vorgänge anfangs so rasch verlaufen, daß schon nach sehr kurzen Zeiten Zustände eintreten, die den Endzuständen schon sehr nahe sind.

Zur Berechnung eines Beispieles geben wir der Formel 284 die Gestalt

$$\frac{Q}{Q-q} = \varepsilon^{\frac{t}{KR}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 286)$$

wobei $\frac{Q}{Q-q} = m$ das Verhältniß der vollen Ladung Q zu dem Betrage $Q - q$, der von der vollen Ladung noch fehlt, vorstellt. Geht man nun auf die Logarithmen über, so erhält man die zur Berechnung von Zahlenbeispielen bequeme Formel

$$t = KR\,\frac{log\ m}{log\ \varepsilon} = 2{,}302\,58 \ldots \times KR\,.\,log\ m \quad . \quad 287\,^{1})$$

Nehmen wir nun beispielsweise an, es fehle von der vollen Ladung noch $^1/_{10}$ Proc., also $^1/_{1000}$; dann wäre $m = 1000$, $log\ m = 3$. Es sei ferner der Widerstand $R = 10\,000$ Ohm und die Capacität $K = 10^{-6}$, nämlich gleich 1 Microfarad, dann ist $t \doteq 2{,}3 \times 10^{-6} \times 10^4 \times 3 = 0{,}069$ Secunden.

Die zur Erreichung eines gewissen, in Procenten der vollen Ladung ausgedrückten Ladungszustandes erforderliche Zeit ist also dem Producte Capacität × Drahtwiderstand (KR) proportional.

Wir werden bei der Besprechung der Kabel auf diesen Satz zurückkommen.

Betrachten wir jetzt auch den Verlauf des Ladestromes. Setzen wir in die allgemeine Gleichung 282 für v den Werth $\frac{q}{K}$ ein, wofür wir wegen $i = \frac{dq}{dt}$ auch $\frac{\int i dt}{K}$ setzen können, so erhalten wir die Gleichung

$$e = Ri + \frac{\int i dt}{K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 288)$$

oder $Kde = KRdi + idt$. Hieraus ergibt sich, da e constant und somit $de = 0$ ist, $KRdi + idt = 0$ und $\frac{di}{i} = -\frac{dt}{KR}$, woraus durch Integration $\varepsilon^{-\frac{t}{KR}} = Ci$ hervorgeht, wobei C eine noch zu bestimmende Inte-

[1]) Hier ist $log\ \varepsilon$ der gemeine Logarithmus von 2,718 28 ..., folglich $\frac{1}{log\ \varepsilon}$ der natürliche Logarithmus von 10, nämlich $log\ nat\ 10 = 2{,}302\,58 \ldots$

grationsconstante ist. Da bei beginnender Ladung ($t = 0$) der Ladestrom seinen maximalen Anfangswerth J hat, ist $1 = CJ$ also $C = \frac{1}{J}$ und

$$i = J \cdot \varepsilon^{-\frac{t}{KR}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 289)$$

Derselbe Ausdruck mit negativem Vorzeichen gilt für die Entladung.

89 **Kabel** [1]). Das Product KR der Capacität und des Drahtwiderstandes (nicht des Isolationswiderstandes) eines isolirten Leitungsdrahtes ist für die Geschwindigkeit (z. B. Wortzahl pro Minute) maßgebend, mit der mittelst dieses Leitungsdrahtes telegraphirt werden kann, und auch für die Entfernung, bis auf die eine telephonische Verständigung möglich ist.

Für die Zeit t in Secunden, die ein telegraphisches Zeichen braucht, um im Empfangsapparate zum Ausdrucke zu kommen, gilt ein Ausdruck von der Form

$$t = cKR \quad \ldots \ldots \ldots \quad 290\text{ [2])}$$

wobei der Factor c von der Beschaffenheit des Apparates abhängt und nach Sabine für den Morse-Apparat $c = \frac{414}{10^9}$, für den Hughes-Apparat $c = \frac{105}{10^9}$ und für den Spiegelapparat $c = \frac{47}{10^9}$ angenommen werden kann. Die telephonische Verständigung ist nach Preece bei $KR = 5000$ ausgezeichnet, bei $KR = 10\,000$ noch gut und bei $KR = 15\,000$ gar nicht mehr möglich [3]).

Die Sprechgeschwindigkeit (speed of working), oder Wortzahl z pro Minute ist der Zeit t verkehrt proportional. Für ein bestimmtes Kabel und unter Voraussetzung des Spiegelgalvanometers als Empfangsapparat gibt Sabine [4]) als größte Wortzahl pro Minute an

$$z = \frac{160 \cdot 10^6}{KR}.$$

---

[1]) In diesem Paragraphen sind die Capacitätswerthe durchaus in Microfarad angenommen.

[2]) Bezeichnet man Capacität und Widerstand pro Längeneinheit mit K_1 und R_1, so kann man anstatt KR auch $K_1 R_1 L^2$ einsetzen, wobei L die auf dieselbe Längeneinheit bezogene Kabellänge bedeutet. Die Zeit t ist also bei einer bestimmten Sorte des Kabels dem Quadrate der Kabellänge proportional.

[3]) Grawinkel und Strecker, Hilfsbuch für die Electrotechnik.

[4]) Latimer Clark und Robert Sabine, Electrical Tables and Formulae (1871), S. 81. Die Angabe bezieht sich auf ein britisch-indisches Kabel, bei dem man die Sprechgeschwindigkeit bis auf 15 Worte pro Minute gebracht hatte. Die Vorausberechnung hatte 12 Worte ergeben, entsprechend der Constante 130 statt 160 in obiger Formel.

Fleeming Jenkin[1]) bemerkt, daß 0,2 Secunden nach Stromschluß in Irland, selbst am empfindlichsten Empfangsapparate in Neufundland noch kein Strom wahrgenommen werden kann. Nach 0,4 Secunden beträgt der empfangene Strom etwa 7 Proc. seines stationären Endwerthes, nach 1,0 Secunde etwa 50 Proc. und endlich nach 3,0 Secunden erreicht er erst nahezu seine volle Intensität. Dies gilt jedoch nur für ein bestimmtes Kabel. Denn die Zeit, binnen der der Strom am Ende des Kabels oder, allgemeiner gesprochen, am Ende eines aliquoten Theiles der Kabellänge einen bestimmten Bruchtheil (z. B. in Procenten ausgedrückt) seines stationären Endwerthes erreicht, hat, in Secunden ausgedrückt, für verschiedene Kabel verschiedene Werthe. Man kann jedoch eine Zeiteinheit α, die dann allerdings für jedes Kabel einen anderen Secundenwerth hat, so wählen, daß die Zeiten, binnen denen die Stromstärke an homologen Kabelstellen (z. B. Ende oder Mitte u. s. w.) gewisse Procente ihres Endwerthes erreicht, bei allen Kabeln gleiche Vielfache von α ausmachen, so, daß also die Curven des ansteigenden Stromes für homologe Stellen verschiedener Kabel dieselben sind. Diese mit α bezeichnete „Einheit der äquivalenten Zeiten" muß offenbar der in der Formel 290 definirten Zeit, also ebenfalls dem Producte Capacität × Widerstand proportional sein. Sie ist, in Secunden ausgedrückt, für Microfarad und Ohm, bestimmt durch die Formel:

$$\alpha = \frac{log\ nat\ \sqrt[10]{10}}{\pi^2} KR \,.\, 10^{-6} = 0{,}023\,33\, KR \,.\, 10^{-6} \,. \quad 291^{2})$$

und entspricht, wie aus der nachstehenden Tabelle ersichtlich, nahezu dem 25. Theile der Zeit, binnen der der ansteigende Strom am Ende eines Kabels seinen stationären Endwerth erreicht, wenn der Kabelanfang an Batterie und das Kabelende an Erde liegt. Demnach kann die ganze Zeit (vom Stromschlusse an gerechnet und das Kabelende an Erde liegend vorausgesetzt), binnen der der ansteigende Strom am Kabelende seinen stationären Endwerth erreicht annähernd $= 25\,\alpha$, also in runder Zahl

$$25\,\alpha = 0{,}6\, KR \,.\, 10^{-6}$$

angenommen werden.

In den Aufschriften der Tabelle bedeutet t die Zeit, binnen der vom Momente des Stromschlusses am Kabelanfange an gerechnet, der ansteigende Strom am Kabelende p Procente seines stationären Endwerthes erreicht.

---

[1]) Electricität und Magnetismus, deutsch von F. Exner (1880), S. 344.

[2]) Fleeming Jenkin, Electricität und Magnetismus, deutsch von Exner (1880), S. 346. — Die Constante findet man gewöhnlich = 0,023 32 angegeben, welche Zahl aber weniger genau ist als 0,023 33.

$\frac{t}{\alpha}$ bedeutet also die dieser Zeit entsprechenden Vielfachen von α. Die in der Tabelle enthaltenen zusammengehörigen Werthe von $\frac{t}{\alpha}$ und p, erstere als Abscissen, letztere als Ordinaten aufgetragen, geben die von Frölich[1]) so genannte Curve des ansteigenden Stromes. Diese entspricht also der Gleichung

$$p = f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 292)$$

Läßt man den Stromschluß am Kabelanfange t Secunden lang andauern und unterbricht dann, indem man zugleich den Kabelanfang an Erde legt, so wird der Stromwerth an dem (gleichfalls an Erde liegenden) Kabelende t_0 Secunden nach der Stromunterbrechung den Werth

$$p_{t+t_0} = f\left(\frac{t+t_0}{\alpha}\right) - f\left(\frac{t_0}{\alpha}\right)$$

haben und man kann auf diese Art also auch die Curve des absteigenden Stromes berechnen.

$\frac{t}{\alpha}$	p	$\frac{t}{\alpha}$	p	$\frac{t}{\alpha}$	p	$\frac{t}{\alpha}$	p	$\frac{t}{\alpha}$	p
1	0,016	6	50,558	11	84,121	16	94,976	21	98,411
2	2,461	7	60,412	12	87,384	17	96,010	22	98,738
3	11,986	8	68,428	13	89,978	18	96,830	23	98,998
4	25,352	9	74,872	14	92,038	19	97,482	24	99,204
5	38,748	10	80,020	15	93,676	20	98,000	25	99,368

Wurde z. B. nach 5α Secunden langem Contacte unterbrochen, so entsprechen den Zeiten 5α, 6α und 7α nach Stromschluß (also 0, α und 2α nach der Stromunterbrechung) der Reihe nach die procentischen Stromwerthe 38,748; 50,558 — 0,016 = 50,542 und 60,412 — 2,461 = 57,951. Wird in diesem Momente, 7α Secunden nach dem ersten Stromschlusse, also 2α Secunden nach erfolgter Unterbrechung (und Ableitung des Kabelanfanges zur Erde), wieder geschlossen, so wird 8α Secunden nach dem ersten Stromschlusse der procentische Stromwerth am Kabelende betragen: 68,428 — 11,986 + 0,016 = 56,458. Bezeichnet man die Zeit seit dem zweiten Stromabschlusse mit t', so wäre allgemein für den Zeitpunkt $t + t_0 + t'$ nach dem ersten Stromschlusse

$$p_{t+t_0+t'} = f\left(\frac{t+t_0+t'}{\alpha}\right) - f\left(\frac{t_0+t'}{\alpha}\right) + f\left(\frac{t'}{\alpha}\right).$$

[1]) Handbuch der Electricität und des Magnetismus, 2. Aufl. (1887), S. 375.

Diese Formel läßt sich leicht für weitere Stromunterbrechungen und Stromschlüsse verallgemeinern und zeigt die Berechnungsart der am Kabelende ankommenden „Stromwellen".

Je kleiner die in Vielfachen von α ausgedrückten Zeitintervalle zwischen den aufeinander folgenden Batterie- und Erdcontacten am Kabelanfange sind, desto kleiner werden die in den Stromwellen am Kabelende zum Ausdrucke kommenden Stromesänderungen werden, desto schwächer also die entsprechenden Bewegungen im Empfangsapparate.

Für das von Jenkin[1]) besprochene französische atlantische Kabel ergeben sich aus dessen in englischen Maßen mitgetheilten Angaben die Capacität K_0 pro Kilometer = 0,232 Microfarad, Kupferwiderstand R_0 pro Kilometer = 1,58 Ohm, folglich das Product $K_0 R_0 = 0{,}366$ und für das ganze 4794 Kilometer lange Kabel die Capacität $K = 1111$ Microfarad und der Kupferwiderstand $R = 7571$ Ohm, folglich das Product $KR = 8\,412\,400$. Hieraus ergibt sich, nach Formel 291 berechnet, $\alpha = 0{,}196$ Secunden. Es würden also bei diesem Kabel $25 \times 0{,}196 = 4{,}9$ Secunden, vom Momente des Stromschlusses am Kabelanfange an gerechnet, erforderlich sein, bis der Strom am Kabelende seinen stationären Endwerth erreicht. Ebenso lange würde es, nachdem man am Kabelanfange Erdcontact gegeben, dauern, bis die Stromstärke am Kabelende von ihrem vollen Werthe wieder auf Null abfällt. Batterie- und Erdcontact zusammengenommen würden also, wenn man Stromwellen mit unverkürzten Amplituden erzeugen wollte, beinahe 10 Secunden in Anspruch nehmen und das Telegraphiren zu sehr verlangsamen. Man muß also bei den überseeischen Linien die Dauer dieser Contacte auf eine geringere Anzahl von α beschränken.

Diese Beschränkung entfällt bei den oberirdischen Telegraphenlinien, denen vermöge ihrer viel geringeren Capacität auch viel kleinere Werthe von α zukommen. Die Capacität K_0 eines oberirdischen Drahtes pro Kilometer beträgt nämlich (§. 47)

$$K_0 = \frac{0{,}024}{log \frac{4h}{d}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 293^1)$$

wobei h die in Centimetern angegebene Entfernung des d Centimeter dicken Drahtes von der Erde ist. Die so berechnete Capacität wird zwar bei Telegraphendrähten durch die Einwirkung der isolirenden Träger und der Gegenstände (Bäume, Häuser u. s. w.), an denen sie vorübergeführt sind, allerdings

[1]) Nach J. Kareis [Zeitschrift f. Electrotechnik, Bd. 10 (1892), S. 163] hat eine oberirdische Leitung von 4 bis 5 mm dickem, 6 m über der Erde befestigtem Drahte bei trockenem Wetter etwa 0,01 Microfarad pro Kilometer. Die Formel 293 gibt für $h = 600$ und $d = 0{,}5$ die Capacität $K_0' = 0{,}0065$.

vermehrt, bleibt aber immerhin im Vergleiche mit den Capacitäten von Kabeln so klein, daß auch die Producte mit den Drahtwiderständen und somit auch die Werthe von α verhältnißmäßig sehr klein ausfallen. Es ist demnach auf oberirdischen Linien eine viel schnellere Zeichengebung als durch Kabel möglich und die Anwendung von Apparaten, die voraussetzen, daß der Strom bei jedem Signale um einen bedeutenden procentischen Betrag seiner Maximalintensität steigt und fällt [1]).

Berechnen wir α beispielsweise für eine $L = 600$ Kilometer lange oberirdische Leitung, deren Capacität pro Kilometer $K_0 = 0{,}01$ Microfarad und deren Widerstand pro Kilometer $R_0 = 8$ Ohm angenommen werden mag, so ergibt sich zunächst das Product von Capacität und Widerstand für die ganze Leitung $KR = K_0 R_0 L^2 = 0{,}01 \times 8 \times 600^2 = 28\,800$ und somit (nach Formel 298) $\alpha = 0{,}023\,33 \times 28\,800 \times 10^{-6} = 0{,}000\,67$ Secunden. Es würden also $25\,\alpha$ nur 0,017 Secunden betragen. Wollte man, um ungünstigen Verhältnissen Rechnung zu tragen, etwa die dreifache Capacität annehmen, so würde ein Zeitintervall von $25\,\alpha$ auch dann nur $^1/_{20}$ Secunde ausmachen.

Bezüglich des Productes KR in der Formel für α ist noch bemerkenswerth, daß dasselbe die Dimension einer Zeit hat, nämlich:

$$(KR) = l^{-1} t^2 \,.\, l t^{-1} = t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 294)$$

In der That bedeutet ja auch α eine Zeit. Wollte man K und R anstatt in Microfarad und Ohm in den absoluten Einheiten des C-G-S-Systemes ausdrücken, so käme in Betracht, daß 1 Microfarad $= 10^{-15}$ absolute Capacitätseinheiten und 1 Ohm 10^9 absolute Widerstandseinheiten beträgt und daß sonach die auf die practischen Einheiten bezogenen Zahlenwerthe von KR im Verhältnisse $10^6 : 1$ größer sein müssen, als die auf die absoluten Einheiten bezogenen. Für diese letzteren wäre demnach $\alpha = 0{,}023\,33\ KR$ Secunden zu setzen.

Diese Formel bleibt ungeändert bei dem Uebergange vom C-G-S-Systeme auf ein anderes Maßsystem, solange die Zeiteinheit nicht geändert wird, wie aus dem Dimensionsausdrucke 294 ersichtlich ist.

Hinsichtlich der Capacität von Kabeln sei noch bemerkt, daß sie durch Aenderungen der Temperatur viel weniger beeinflußt wird, als der Isolationswiderstand. Während dieser bei steigender Temperatur sehr rasch abnimmt, findet eine sehr langsame Zunahme der Capacität statt. Wir entnehmen beispielsweise die nachstehenden Zahlen einer Versuchsreihe, welche K. Zickler in der Kabelfabrik von Jacottet & Co. in Simmering (Wien) an einem Telephonkabel ausgeführt hat. Das Kabel befand sich in einem Wasserbade, dessen Temperatur von 15° C. bis auf 54° C. erhöht wurde.

---

[2]) Vergl. Jenkin, l. c.

Die Werthe von Capacität in Microfarad und Isolationswiderstand in Megohm sind pro Kilometer angegeben.

Bei 15° C. war die Capacität 0,165; der Isolationswiderstand 4000. Bei 19° C. hatte der Isolationswiderstand schon auf 3200 abgenommen, während die Capacität noch keine meßbare Veränderung zeigte. Bei 24° C. hatte der Isolationswiderstand schon fast auf die Hälfte, nämlich auf 2100, abgenommen, während die Capacität von 0,165 auf 0,166, also nur um 0,6 Proc. zugenommen hatte. Bei 48° C. betrug der Isolationswiderstand 200, also $^1/_{20}$ seines ursprünglichen Werthes, und die Capacität 0,170, also nur um 3 Proc. mehr als anfangs. Bei 54° C. waren die Werthe beider Größen 150 und 0,174.

Isolationswiderstand. Für den Isolationswiderstand W eines 90
mit einer homogenen cylindrischen Umhüllung vom specifischen Widerstande ϱ umgebenen Drahtes von der Länge L und vom Durchmesser d gilt, wenn D der äußere Durchmesser der isolirenden Umhüllung ist, die Siemens'sche Formel [1])

$$W = \frac{\varrho}{2\pi L} \cdot log\ nat\ \frac{D}{d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 295)$$

oder, wenn man die gemeinen Logarithmen einführt und $\frac{log\ nat\ 10}{2\pi} = 0{,}366$ setzt,

$$W = 0{,}366\ \frac{\varrho}{L} \cdot log\ \frac{D}{d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 296)$$

Dabei stellt ϱ den Widerstand eines Cubikcentimeters vom Isolirmateriale (z. B. Guttapercha) und L die Länge des Probestückes in Centimetern vor. Der Isolationswiderstand W_0 pro Kilometer ist demnach

$$W_0 = \frac{L}{100\,000} \cdot W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 297)$$

---

[1]) Werner Siemens, Gesammelte Abhandlungen und Vorträge (1881), S. 224. Der Beweis der Formel ergibt sich in folgender Weise. Die betrachtete isolirende Hülle sei ein Hohlcylinder von der Länge L, vom inneren Durchmesser d und vom äußeren Durchmesser D. — Wir zerlegen diese Hülle in coaxiale Elementarcylinder vom inneren Radius x und von der Dicke dx. Ein solches Cylinderdifferentiale hat hinsichtlich einer von innen nach außen vor sich gehenden Electricitätsbewegung den Widerstand $dW = \varrho \frac{dx}{2\pi x \times L} = \frac{\varrho}{2\pi L} \cdot \frac{dx}{x}$. Durch Integration erhält man nun

$$W = \frac{\varrho}{2\pi L} \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \frac{dx}{x} = \frac{\varrho}{2\pi L}\ log\ nat\ \frac{D}{d}.$$

Für den Isolationswiderstand pro Kilometer von Drähten mit Guttapercha-Umpressung von 15° C. Temperatur findet man die Formel angegeben[1]):

$$W_0 = 2358 \log \frac{D}{d} \text{ Megohm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 298)$$

Demnach würde z. B. ein Guttaperchadraht von den Dimensionen $d = 1{,}0$ mm und $D = 2{,}3$ mm einen Isolationswiderstand von etwas über 1000 Megohm pro Kilometer haben müssen.

Temperaturzunahme vermindert den Isolationswiderstand. Bei Guttapercha ist dieser Einfluß so bedeutend, daß deren specifischer Widerstand z. B. bei 20° C. nur die Hälfte von jenem bei 15° C. beträgt[2]). Auf die Temperatur von 15° C. pflegt man in Deutschland die Isolationswiderstände zu beziehen (in England auf 75° F.). Ist W der Isolationswiderstand eines Guttaperchadrahtes bei der Temperatur t und W' der Isolationswiderstand desselben bei der höheren Temperatur $t' = t + \vartheta$, so ist das Verhältniß annähernd

$$\frac{W'}{W} = a^{\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 299)$$

woraus folgt

$$\log W' - \log W = (\log a)\,(t' - t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 300)$$

d. h. die Differenz der Logarithmen der Isolationswiderstände ist proportional der Differenz der Temperaturen[3]). Dabei ist $a < 1$, demnach $\log a$ eine negative Zahl. Wir wollen $a = 0{,}875$ annehmen[4]) und erhalten demnach $\log a = -0{,}058$, also

$$\log W' = \log W - 0{,}058\,(t' - t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 302)$$

Der Isolationswiderstand hängt auch vom äußeren Drucke ab und zwar wird er, wenn das Kabel fehlerfrei ist, durch den äußeren Druck (z. B. Wasserdruck) erhöht; hingegen vermindert, wenn die Isolirung Fehler (z. B. Blasen oder Risse) hat.

Uppenborn[5]) gibt für den Isolationswiderstand W_p beim Drucke von

---

[1]) Grawinkel und Strecker, Hilfsbuch für Electrotechnik. Der Coefficient 2358 setzt übrigens $\varrho = 644 \cdot 10^{12}\ \Omega$ voraus, während z. B. Uppenborn (Kalender 1902, S. 61) $450 \cdot 10^6$ Megohmcentimeter dafür angibt, also $\varrho = 450 \cdot 10^{12}\ \Omega$.

[2]) Näheres hierüber in den Mittheilungen aus dem Telegraphen-Ingenieur-Bureau des Reichspostamtes, 2. Bd., S. 116.

[3]) Dagegen ist bei metallischen Leitern die Differenz der Widerstände proportional der Differenz der Temperaturen, und zwar wächst der Widerstand bei denselben mit der Temperatur, während er bei den Isolirmassen mit steigender Temperatur abnimmt, z. B. für Kupfer ist

$$W' + W\,(1 + 0{,}0038\,\vartheta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 301)$$

[4]) Siehe Uppenborn, Kalender 1902, S. 62.

[5]) Kalender 1902, S. 62.

p Atmosphären im Vergleiche mit dem Isolationswiderstande W_1 beim Drucke einer Atmosphäre die Formel

$$W_p = W_1 (1 + 0{,}003\,27\, p) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 303)$$

Der (sehr schwache) Strom, der bei der Messung des Isolationswiderstandes an dem Galvanometer beobachtet wird, durch dessen Windungen die in die Kupferader eintretende und durch die isolirende Umhüllung derselben austretende Electricität hindurchgeht[1]), wird „Isolationsstrom" genannt. Bezeichnen wir diesen mit i, so ist, wenn e die electromotorische Kraft der Meßbatterie, W den Isolationswiderstand, G den Galvanometerwiderstand und U den Batteriewiderstand bedeutet (von den Widerständen der Verbindungsdrähte wollen wir absehen), $W + G + U = \frac{e}{i}$.

Hat man einen Vorversuch gemacht, bei dem in den Stromkreis der Meßbatterie von der electromotorischen Kraft e' und dem Widerstande U' nebst dem Galvanometer vom Widerstande G' ein sehr großer Vergleichswiderstand R (ein oder mehrere Megohm) geschaltet war und der Strom i' beobachtet worden ist, so ergibt sich $R + G' + U' = \frac{e'}{i'}$. In der Regel sind die Widerstände W und R so groß, daß die übrigen dagegen nicht in Betracht kommen. Man erhält dann

$$W = R \cdot \frac{e}{e'} \cdot \frac{i'}{i} = R \cdot \frac{n}{n'} \cdot \frac{s'}{s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 304)$$

wenn nämlich n und n' die in beiden Fällen angewendeten Elementezahlen der Meßbatterie und s und s' die in beiden Fällen am Spiegelgalvanometer abgelesenen Ablenkungen des Scalenbildes bedeuten[2]).

Diese Messung des Isolationswiderstandes beruht also auf Strommessungen, insbesondere auf der Messung des sogenannten Isolationsstromes.

---

[1]) Das andere Ende der Kupferader denken wir uns isolirt, den anderen Batteriepol, mit dem Metallpanzer des Kabels verbunden, an der Erde liegend; oder in Wasser abgeleitet, wenn das untersuchte Kabel (z. B. Guttaperchadraht) in Wasser sich befindet.

[2]) Um das Galvanometer für den Fall einer schlechten Isolirung des Kabels vor einem zu starken Strome zu schützen, empfiehlt es sich, demselben den Vergleichswiderstand R oder einen angemessenen Theil r desselben als „Schutzwiderstand" vorgeschaltet zu lassen. Es ist dann im Allgemeinen

$$W = R \left(\frac{n}{n'} \cdot \frac{s'}{s} - \frac{r}{R} \right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 305\,\text{I})$$

und für $r = R$

$$W = R \left(\frac{n}{n'} \cdot \frac{s'}{s} - 1 \right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 305\,\text{II})$$

Ein anderes oft angewendetes Verfahren zur Ermittelung des Isolationswiderstandes eines Kabels beruht auf der Messung des Ladungsverlustes, der eintritt, wenn man das als Condensator behandelte Kabel das eine Mal sogleich nach der Ladung und das andere Mal eine bestimmte Zeit, z. B. t Minuten, nach der Ladung wieder entladet. Ist das Verhältniß dieser beiden Entladungen $= \frac{Q}{q}$ und C die durch Vergleichung mit einem Condensator ermittelte Capacität des Kabels in Microfarad, dann ist der Isolationswiderstand W gegeben durch die Siemens'sche[1]) Formel

$$W = 26{,}06 \frac{t}{C \,.\, log \frac{Q}{q}} \text{ Megohm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 306)$$

Beispiele. Bei einem concentrischen Kabel (innerer Leiter und äußerer Leiter, je 220 mm² Querschnitt) wurde sowohl die innere Isolirung (zwischen beiden Leitern) als auch die äußere Isolirung (zwischen dem äußeren Leiter und der Schutzhülle) geprüft. Im ersten Falle waren beide Leiter so in den Stromkreis der Meßbatterie geschaltet, daß der Isolationsstrom vom inneren Leiter durch die Isolirung zu dem mit der Erde verbundenen äußeren Leiter überging.

---

[1]) Der Beweis der Formel ergibt sich aus folgender Erwägung. Es sei in absoluten Einheiten e das Ladungspotential des Drahtes gegen Erde, w der Isolationswiderstand, i der Isolationsstrom, ferner q die Ladung, die das Kabel zur Zeit t noch besitzt und Q der Anfangswerth der Ladung ($t = 0$). Dann ist, da $i = \frac{e}{w}$, $\frac{e}{w} dt = i dt = -dq$ und, wenn die Capacität des Kabels mit k bezeichnet, also $e = \frac{q}{k}$ gesetzt wird, $\frac{q}{kw} dt = -dq$ oder $\frac{dt}{kw} = -\frac{dq}{q}$, woraus durch Integration $\frac{t}{kw} = -log\ nat\ Cq$ hervorgeht, wobei C eine noch zu bestimmende Integrationsconstante ist. Da nun für $t = 0$, $q = Q$ und $log\ nat\ CQ = 0$, also $CQ = 1$ sein muß, ergibt sich $C = \frac{1}{Q}$, also $\frac{t}{kw} = -log\ nat \frac{q}{Q}$ $= log\ nat \frac{Q}{q}$ und hieraus $w = \frac{t}{k\ log\ nat \frac{Q}{q}}$. Setzt man nun für t Secunden T Minuten ein, also $t = 60\,T$ und $w = 10^{15}\,W$, um die Widerstände in Megohm auszudrücken, ferner $k = 10^{-15}\,K$, um die Capacität auf Microfarad umzurechnen, und berücksichtigt man endlich, daß $log\ nat \frac{Q}{q} = 2{,}30 \ldots log \frac{Q}{q}$, so erhält man die zu beweisende Formel. Als Galvanometer empfiehlt sich das aperiodische Spiegelgalvanometer und es können für Q und q die an diesem beobachteten entsprechenden Scalenausschläge in die Formel 306 eingesetzt werden. Ein Nebenschluß-Widerstandskasten ist dem Instrumente beigegeben. Ein Batteriewähler dient zur Veränderung der Elementezahl nach Bedarf.

Als vorher anſtatt des Kabels ein Condenſator von 1,0 Microfarad eingeſchaltet und das Galvanometer mit dem Nebenſchluß $^1/_9$ (des Galvanometerwiderſtandes) verſehen war, bewirkte die unmittelbar nach der (nicht durch das Galvanometer geleiteten) Ladung vorgenommene Entladung einen Ausſchlag von 66 Scalentheilen. Als hierauf anſtatt des Condenſators das Kabel mit derſelben Meßbatterie (24 Daniell) geladen und nach 10 Secunden langem Stromſchluß durch das Galvanometer ohne Nebenſchluß entladen wurde, betrug der Ausſchlag 28 Scalentheile. Demnach war die Capacität des Innenleiters $= 1{,}0\ \frac{28}{66 \times 10} = 0{,}0424$ Microfarad. Da das unterſuchte Kabelſtück 104 m lang war, ergab ſich die Capacität pro Kilometer $= \frac{1000}{104} \times 0{,}0424 = 0{,}408$ Microfarad.

Zum Zwecke der Iſolationsmeſſung wurde das Kabel noch einmal, wie vorhin, geladen und, nachdem der geladene Innenleiter 5 Minuten lang von Batterie und Erde abgeſchaltet belaſſen worden war, durch das Galvanometer ohne Nebenſchluß entladen. Dabei wurde der Ausſchlag 23,7 beobachtet. Hieraus ergibt ſich der Iſolationswiderſtand (bei der beobachteten Temperatur 18,9° C.) nach Formel 306

$$W = 26{,}06\ \frac{5}{0{,}0424\ log\ \frac{28}{23{,}7}} = 42\,400 \text{ Megohm},$$

folglich

$$\frac{104}{1000} \times 42\,400 = 4411 \text{ Megohm pro Kilometer}.$$

Hierauf wurde in analoger Weiſe der Iſolationswiderſtand zwiſchen Außenleiter und Schutzhülle gemeſſen. Als Meßbatterie wurden mittelſt des Batteriewählers 72 Elemente genommen und das Galvanometer war ſtets mit dem Nebenſchluſſe $^1/_9$ verſehen.

Die Capacität des Condenſators war dieſes Mal 0,1 Microfarad. Es wurde beobachtet: Ausſchlag bei der Condenſatorentladung 20,1; Ausſchlag bei der ſofort nach der Ladung vorgenommenen Entladung des Kabels 15,4; Ausſchlag bei der 5 Minuten nach der Ladung vorgenommenen Kabelentladung 14,2. — Hieraus ergibt ſich die Capacität 0,1 $\frac{154}{201} = 0{,}0766$; alſo pro Kilometer $\frac{1000}{104} \times 0{,}0766 = 0{,}7367$. Für den Widerſtand der äußeren Iſolirung findet man demnach

$$W = 26{,}06\ \frac{5}{0{,}0766\ log\ \frac{154}{142}} = 48\,273 \text{ Megohm},$$

also

$$\frac{104}{1000} \times 48273 = 5020 \text{ Megohm pro Kilometer.}$$

Aus der Formel 295 folgt

$$\varrho = \frac{WL}{0{,}366 \, log \, \frac{D}{d}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 307)$$

Diese Formel gestattet die Berechnung des specifischen Widerstandes (d. i. des Widerstandes eines Cubikcentimeters) des Isolirmateriales aus dem für ein Kabelstück von der Länge von L Centimetern gefundenen Isolationswiderstande W.

Demnach ergäbe sich für die innere Isolirung des im vorigen Beispiele besprochenen Kabels.

$$\varrho = \frac{42400 \times 10400}{0{,}366 \, log \, \frac{31}{20}} = 6324 \text{ Millionen Megohm}^{1}),$$

da W in Megohm gegeben war.

Für die äußere Isolirung ergibt sich

$$\varrho = \frac{48273 \times 10400}{0{,}366 \, log \, \frac{49{,}5}{39{,}5}} = 13977{,}5 \text{ Millionen Megohm}^{2}).$$

Es ist jedoch einleuchtend, daß selbst kleine geometrische Unregelmäßigkeiten der untersuchten isolirenden Schichte des Kabels den Werth von W und somit auch von ϱ stark beeinflussen können und dieses Verfahren daher manchmal recht ungenaue Werthe für den specifischen Widerstand der Isolirmasse ergeben kann.

91 **Specifische Widerstände**[3]). Zur Vervollständigung und besseren Uebersicht der in §. 45 mitgetheilten Zahlen möge die nachstehende Zusammen-

[1]) Die äußeren und inneren Durchmesser der inneren und äußeren Isolirschichte dieses Kabels sind nämlich 31 und 20 mm; und 49,5 und 39,5 mm.

[2]) Der specifische Widerstand ergab sich also für die äußere Isolirschicht mehr als doppelt so groß als für die innere. Auch aus den Messungen an anderen Kabeln ähnlicher Construction ergaben sich größere specifische Widerstände für den äußeren Isolator als für den inneren, was auf Einzelheiten des Fabricationsverfahrens zurückzuführen ist, auf deren Erörterung hier nicht eingegangen werden kann.

[3]) Die hier mitgetheilten Zahlen sind größtentheils dem Handbuche: „The Electrician" Directory and Handbook for 1896 und den Kalendern (1900, 1901, 1902) von Uppenborn entnommen. Bei Citaten soll das Handbuch „Directory" mit (D) und der Kalender von Uppenborn mit (U) angedeutet werden. — Die auf die Gasteiner und Karlsbader, sowie auf das Wiener Hochquellenwasser bezüglichen Angaben sind meinen Untersuchungen, insbesondere meiner Abhandlung: „Ueber die Thermen von Gastein", Wiener Sitzungsberichte 1885, entnommen.

stellung dienen. In dieser sind die specifischen Widerstände durchaus in der practischen Einheit des C-G-S-Systems, nämlich in Ohmcentimeter ($10^9\,C^2S^{-1}$) angegeben. Die eingeklammert beigefügten Zahlen, z. B. (46) beim Paraffin, bedeuten die Celsius-Temperaturen, für die die angegebenen Widerstandswerthe Geltung haben.

1. Paraffin (46) $34\,000 \times 10^{12}$.
2. Ebonit (46) $28\,000 \times 10^{12}$.
3. Flintglas (20) $20\,000 \times 10^{12}$.
4. Gummi für hohe Isolirung von Siemens Brothers (15) $16\,000 \times 10^{12}$ (U).
5. Hooper Compound (24) $15\,000 \times 10^{12}$.
6. Fiber[1]) von Siemens (15) $11\,900 \times 10^{12}$.
7. Naturgummi (24) $10\,900 \times 10^{12}$.
8. Schellack (28) 9000×10^{12}.
9. Holztheer (18) 1700×10^{12}.
10. Vulcanisirter Gummi[2]) (15) 1500×10^{12}.
11. Guttapercha (24) 450×10^{12}.
12. Ordinäres Glas (20) 90×10^{12}.
13. Glimmer (20) 84×10^{12}.
14. Olivenöl (18) 1×10^{12}.
15. Pergamentpapier (?) $30\,000 \times 10^6$.
16. Kartenpapier (?) 5000×10^6.
17. Gewöhnliches Papier (?) 3000×10^6.
18. Absolut reines Wasser, theoretisch[3])
    (0) $84{,}7 \times 10^6$; (18) $26{,}0 \times 10^6$.
    Im Vacuum destillirtes reinstes Wasser[3])
    (0) $67{,}2 \times 10^6$; (18) $23{,}5 \times 10^6$.
19. Destillirtes Wasser (20) $0{,}257 \times 10^6$[4]).
20. Niederschläge (Regen, Schnee) (18) $0{,}229 \times 10^6$ bis herab auf $0{,}047 \times 10^6$.
21. Wasser der Gasteiner Ache (17,5) $0{,}033 \times 10^6$.
22. Gasteiner Thermalwasser[5]) (20) $0{,}002\,35 \times 10^6$.

---

[1]) Für Fiber findet man auch angegeben (20) 330×10^{12} (U).

[2]) Man findet dafür auch den viel geringeren Werth wie für Guttapercha angegeben (U).

[3]) F. Kohlrausch und Ad. Heydweiller, siehe §. 45.

[4]) Nach einer von mir ausgeführten Untersuchung einer Probe destillirten Wassers aus dem chemischen Laboratorium der technischen Hochschule in Wien.

[5]) Den doppelten specifischen Widerstand hatte das Wiener Hochquellenwasser in seinem ursprünglichen Zustande, d. h. vor der öfteren Vermischung mit Potschacher und insbesondere mit Schwarza-Wasser. Siehe meine Abhandlung über die Thermen von Gastein.

23. Karlsbader Thermalwasser (20) 0,000 157 $\times 10^6$.
24. 10 proc. $CuSO_4$-Lösung (18) 31.
25. 10 proc. NaCl-Lösung (18) 8,25.
26. 26,4 proc. NaCl-Lösung (18) 4,64.
27. 30 proc. H_2SO_4-Lösung (18) 1,35.
28. Retortenkohle 0,067.
29. Bogenlichtkohle (Carré) 0,007.
30. Glühlampenkohle 0,004.
31. Mangankupfer (70 Cu; 30 Mn) 0,000 100 6.
32. Quecksilber 0,000 094 07.
33. Rheothan und Constantan[1]) 0,000 05.
34. Manganin (84 Cu, 12 Mn, 4 Ni) 0,000 042.
35. Nickelin 0,000 04.
36. Patentnickel (75 Cu, 25 Ni) 0,000 034.
37. Neusilber (60 Cu, 25 Zn, 15 Ni) 0,000 03.
38. Platin-Iridium 0,000 029 37.
39. Neusilber (4 Cu, 2 Zn, 1 Ni) 0,000 021 17.
40. Blei (gepreßt) 0,000 019 85.
41. Nickel (rein) 0,000 012 29.
42. Eisen (rein) 0,000 009 61 bis 0,000 009 725.
43. Phosphorbronze[2]) 0,000 008 479.
44. Platin (rein, geglüht) 0,000 008 222 bis 0,000 009 03.
45. Messing (61,34 Cu; 37,41 Zn; 0,8 Pb; 0,11 Fe) 0,000 006 9 (U)[3]).
46. Gold (reinstes, weich) 0,000 001 952.
47. Kupfer (reinstes) 0,000 001 533.
48. Silber (geglüht) 0,000 001 499.

Bei den Angaben für die unter 28. bis 48. angeführten Leiter ist die Temperatur 0° C. vorausgesetzt.

Vergleicht man die für die specifischen Widerstände des Paraffins und des geglühten Silbers hier angegebenen Zahlen, so ergibt sich das Verhältniß $22\,681 \times 10^{18} : 1$.

Von dem Einflusse der Temperatur auf den electrischen Leitungswiderstand der als Isolatoren verwendeten schlechten Leiter (insbesondere der Guttapercha) ist schon im §. 90 die Rede gewesen. Desgleichen von dem in entgegengesetztem Sinne und nach einem anderen Gesetze stattfindenden Einflusse der Temperatur auf den specifischen Widerstand der metallischen Leiter.

---

[1]) Constantan, aus gleichen Theilen Kupfer und Nickel bestehend. (Temperaturcoëfficient $\beta = 0{,}000\,025$.)

[2]) Phosphorbronze, enthaltend 90 Cu, 9 Sn und 0,5 bis 0,8 P.

[3]) Uppenborn, Kalender 1902, S. 45.

Der specifische Widerstand der reinen Metalle ist, wie R. Clausius[1]) nachgewiesen hat, der absoluten Temperatur, nämlich der Temperatur $T = \frac{1}{\alpha} + t$ nahezu proportional, wobei t die gewöhnliche (in Celsiusgraden ausgedrückte) Temperatur und $\alpha = 0{,}003\,666$ der Ausdehnungscoefficient für Gase ist[2]). Man hätte demnach annähernd

$$w_t = w_0 (1 + \alpha t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 308)$$

wenn w_0 den Widerstand eines Drahtes aus reinem Metall bei 0^0 C. und w_t den Widerstand desselben Drahtes bei der Temperatur t^0 C. bedeutet, was mit der Formel 300 für Kupferdrähte gut übereinstimmt.

Für Legirungen hingegen ist der sogenannte Temperaturcoëfficient der Widerstände, nämlich der Coëfficient β in der Formel

$$w_t = w_0 (1 + \beta t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 309)$$

in der Regel viel kleiner als α; z. B. bei dem für electrische Widerstandsapparate häufig verwendeten Neusilber (vier Theile Kupfer, zwei Theile Zink und ein Theil Nickel) etwa zehnmal kleiner. Ungefähr ebenso verhält es sich bei den ähnlichen Legirungen „Nickelin" und „Rheothan". Diese drei Legirungen haben auch verhältnißmäßig große specifische Widerstände, nämlich in runden Zahlen 0,3, 0,4 und 0,5 pro $\frac{1\,\text{m}}{1\,\text{mm}^2}$. Einen noch zehnmal kleineren Temperaturcoëfficienten, nämlich $\beta = 0{,}000\,04$ hat Mangankupfer (70 Kupfer und 30 Mangan), dessen specifischer Widerstand jenem des Quecksilbers nahezu gleich ist. Einen sogar negativen Temperaturcoëfficienten ($\beta = -0{,}000\,03$) hat das Nickelmangankupfer (73 Kupfer, 3 Nickel und 24 Mangan) bei einem specifischen Widerstande, der zwischen jenen des Nickelins und Rheothans liegt[3]).

Uebrigens mögen noch einige Angaben des Temperaturcoëfficienten β (nach Uppenborn[4]) hier Platz finden. Eisen (rein) 0,004 8[5]); Kupfer (rein) 0,004 45; Kupfer (käuflich) 0,003 8[6]); Neusilber 0,000 36; Nickel (geglüht) und Zink (gepreßt) 0,003 65; Platin (geglüht) 0,002 43; Platin-Silber (33,4 Proc. Pt) 0,000 32; Silber (geglüht) 0,003 77; Quecksilber 0,000 907.

---

[1]) Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie, Bd. 2 (1867), S. 226.

[2]) Siehe meinen Grundriß der mechanischen Physik, S. 170.

[3]) Vergl. die diesbezügliche Mittheilung aus der Physicalisch-Technischen Reichsanstalt von K. Feußner und St. Lindeck in der Zeitschrift für Instrumentenkunde 1889, S. 233.

[4]) Kalender 1902, S. 45 und 46.

[5]) Gilt auch für gewöhnlichen Eisendraht.

[6]) Uebereinstimmend mit der Formel 300.

Ueber die Ermittelung der specifischen Widerstände sei noch in Kürze folgendes bemerkt.

Von einem festen Körper wird ein cylindrisches oder primatisches Probestück (Draht oder Stab) untersucht, dessen Länge (in cm) mit L und dessen Querschnitt (in cm^2) mit Q bezeichnet werden mag. Hat man nun für dieses untersuchte Probestück einen Widerstand $= R$ Ohm gefunden, so ergibt sich daraus nach Formel 126 sofort der specifische Widerstand

$$\varrho = \frac{Q}{L} \cdot R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 310)$$

in $10^9 C^2 S^{-1}$, d. i. in Ω pro cm^3.

Zur Ermittelung des specifischen Widerstandes eines flüssigen zersetzbaren Leiters dient am besten das von F. Kohlrausch angegebene und zu großer Vollkommenheit ausgebildete indirecte Verfahren.

Zwei durch ein U-förmiges Rohr zu einem Communicationsgefäße verbundene gläserne Becher werden zunächst mit einer Flüssigkeit gefüllt, deren Leitfähigkeit im Vergleiche mit Quecksilber durch genaue Voruntersuchungen bereits bekannt ist, z. B. mit 26,4 proc. Kochsalzlösung, deren Leitfähigkeit im Vergleiche mit Quecksilber von 0° C. bei der Temperatur $t°$ C. durch

$$k = 0{,}000\,020\,15 + 0{,}000\,000\,45\,(t - 18) \quad . \quad . \quad 311)$$

ausgedrückt wird. Durch eingesetzte Platinelectroden wird nun von dieser „Normallösung" sozusagen ein Probestück von bestimmter Form und Ausdehnung abgegrenzt, dessen Widerstand W_n mit der Meßbrücke ermittelt werden kann, wobei man Wechselströme und (anstatt eines Electrodynamometers zur Beobachtung des Nullwerdens des Brückenstromes) ein Telephon anzuwenden pflegt. Bezeichnet man nun die in Formel 311 ausgedrückte Leitfähigkeit der Normallösung mit k_n, so stellt

$$R_0 = k_n \, W_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 312)$$

offenbar den Widerstand vor, den eine anstatt der zwischen den Electroden abgegrenzten Normallösung eingesetzte Quecksilbermasse von 0° C. haben würde. Man nennt diesen Quecksilberwiderstand die Widerstandscapacität des Gefäßes.

Wird nun dieses Widerstandsgefäß (nach gehöriger Reinigung) mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt und deren Widerstand W in der beschriebenen Weise gemessen, so ergibt sich für deren specifischen Widerstand ϱ'_t bei der Temperatur $t°$ C. der Beobachtung im Vergleiche mit Quecksilber von der Temperatur 0° C. selbstverständlich die Gleichung

$$\varrho'_t = \frac{W}{R_0} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 313)$$

Um hieraus den specifischen Widerstand ϱ_t für dieselbe Temperatur der untersuchten Flüssigkeit in Ohm pro cm^3 zu erhalten, hat man ϱ'_t durch 10630 zu dividiren (Formel 129).

Beispiel. Für Gasteiner Thermalwasser, das bis auf 20° C. abgekühlt war, fand ich nach dem beschriebenen Verfahren von F. Kohlrausch $\varrho'_{20} = 25 \times 10^6$, woraus sich ergibt

$$\varrho_{20} = \frac{25 \times 10^6}{10630} = 2352\ 10^9\, C^2 S^{-1}.$$

Hydroelectrische Ketten. Die electromotorische Kraft einer hydro- 92
electrischen Kette ist durch die chemischen Processe bestimmt, die darin bei ihrer Thätigkeit vor sich gehen. Diese sind im Allgemeinen theils Verbindungen, theils Zerlegungen und würden, wenn sie außerhalb des Stromkreises stattfänden, theils Wärmeentwickelung, theils Wärmebindung mit sich bringen. Bei der Daniell'schen Kette z. B. (wenn wir die gegenseitig sich aufhebenden Processe — Zerlegung von H_2SO_4 und Bildung von H_2SO_4 — außer Betracht lassen) findet einerseits Bildung von Zinkvitriol statt, der pro Aequivalent eine Wärmeentwickelung $\vartheta_1 = +\ 53045$ Calorien entsprechen würde, und anderseits Zerlegung von Kupfervitriol, der $\vartheta_2 = -\ 27980$ Calorien pro Aequivalent als gebundene Wärme zukommen würden[1]). Diese sogenannten Aequivalentwärmen oder „Wärmetönungen" sind Gramm-Calorien, wenn die Aequivalentgewichte (Zn = 32,7; Cu = 31,8) in Grammen angenommen werden. Sie geben im vorliegenden Falle $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 25065$. Wir wollen diese algebraische Summe der Wärmetönungen in der Kette im Allgemeinen $\Sigma\vartheta$ nennen.

Könnte man annehmen, daß diese Wärmemenge vollständig in electrische Stromarbeit umgesetzt wird, so wäre es möglich, aus ihr die electromotorische Kraft der Kette genau zu berechnen. Diese Annahme trifft zwar im Allgemeinen nicht vollständig zu[2]), aber doch in der Regel mit solcher Annäherung, daß die Berechnung der electromotorischen Kraft, die der algebraischen Summe der Wärmetönungen (Aequivalentwärme der chemischen Processe) in einer Kette entsprechen würde, einen practischen Werth hat. Wir wollen also diese Berechnungsart in Kürze darlegen.

Nehmen wir vorerst an, es sei ein Strom von der Intensität = 1 nach absolutem Maße im Stromkreise vorhanden, dann ist nach §§. 40 und 41

[1]) Pfaundler's Lehrbuch der Physik, Bd. 3, S. 578 und Wüllner's Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 3, S. 716.

[2]) Wir können hier nicht näher darauf eingehen, sondern berufen uns diesfalls auf die Abhandlungen von v. Helmholtz über die Thermodynamik chemischer Vorgänge. Ber. d. Berliner Academie (1882), Bd. 1, S. 22 und Bd. 2, S. 825. Siehe auch Dolezalek, Die Theorie des Blei-Accumulators.

$\frac{\eta}{\alpha} = 0{,}000\,103\,6 = f$ die Anzahl der Aequivalente, die in jeder Secunde in der Kette umgesetzt werden müssen (z. B. Auflösung von Zink einerseits und Ausscheidung von Kupfer anderseits) und es werden demnach $f\Sigma\vartheta$ Calorien in jeder Secunde zum Umsatze in Stromarbeit verfügbar. Ist die Stromstärke nach absolutem Maße $= i$, so beträgt diese verfügbare Wärmemenge $if\Sigma\vartheta$ Calorien pro Secunde. Das mechanische Aequivalent derselben ist $\mathfrak{E}if\Sigma\vartheta$, wenn $\mathfrak{E}$ das mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit bedeutet. Dieser Ausdruck stellt im Sinne der Erläuterungen der §§. 49 und 50 eine vom Strome i bei der Potentialdifferenz $H = \mathfrak{E}f\Sigma\vartheta$ geleistete Stromarbeit vor, nämlich jene, in die, wie wir annehmen, die in jeder Secunde frei werdenden $if\Sigma\vartheta$ Calorien umgesetzt werden. Es bedeutet dann H offenbar die electromotorische Kraft der Kette in absoluten Einheiten. Will man sie in Volt ausgedrückt haben, so muß man schreiben:

$$H = \frac{\mathfrak{E}f\Sigma\vartheta}{10^8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 314)$$

Mit Rücksicht auf die bekannten Werthe $\mathfrak{E} = 4{,}19 \times 10^7$ (Formel 52) und $f = 0{,}000\,103\,6$ erhält man:

$$H = 0{,}000\,043\,4\,\Sigma\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 315)$$

Beispielsweise auf die Daniell'sche Kette angewendet gibt dies

$$H = 0{,}000\,043\,4 \times 25\,065 = 1{,}0878 \text{ Volt.}$$

Meine Bestimmungen der electromotorischen Kraft der Daniell'schen Kette [1]) (die ersten absoluten Messungen dieser Größe, die nach einer fehlerfreien Methode und mit Siemens'schen Original-Widerstandsapparaten ausgeführt worden sind [2]), haben die Zahl 1,088 ergeben. v. Ettingshausen fand ganz denselben Werth, H. F. Weber 1,080; Reynier und ebenso Wright 1,079. Bei einer Untersuchung von V. Pierre hat sich die etwas größere Zahl 1,0969 herausgestellt. Für die sogenannten Normal-Daniell (ohne Diaphragma) findet man noch größere Werthe angegeben, z. B. Kittler fand für sein Normal-Daniell 1,195 [3]).

Für Clark's Normalelement (positiver Pol Quecksilber, bedeckt mit einem durch Kochen von Hg_2SO_4 mit concentrirter $ZnSO_4$-Lösung hergestellten Teige, in den reines Zink als negativer Pol taucht [4]), ergab sich bei 15,5° C. eine electromotorische Kraft von 1,434 Volt (v. Ettingshausen [5]).

---

[1]) Pogg. Ann., Bd. 133 (1868), S. 465.

[2]) Zeitschr. f. Electrotechnik, Jahrg. 1884, S. 707.

[3]) Kittler, Die electromotorische Kraft des Daniell'schen Elementes. (Auch in Wied. Ann., Bd. 17.)

[4]) F. Kohlrausch, Practische Physik, 6. Aufl. (1887), S. 206 u. 207 und 9. Auflage, S. 350.

[5]) Zeitschr. f. Electrotechnik, Jahrg. 1884, S. 489.

Diese Zahl war bis jetzt auch allgemein angenommen. Dagegen hätte man nach einer Bestimmung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt vom 1. Januar 1901 die E. M. K. des Clark-Elementes bei 15° C. gleich 1,4328 anzunehmen.

Beim Durchgange eines electrischen Stromes durch einen Electrolyten findet ein Abfall des Werthes der Potentialfunction statt, der aus zwei Theilen besteht; der eine, herrührend von der Electrolyse, beträgt $\frac{\mathcal{E} f \vartheta}{10^8}$ Volt und hängt also nur von der Aequivalentwärme der zersetzten Substanz ab; der andere, von der Widerstandsarbeit herrührend, beträgt JR Volt, wenn J die Stromstärke in Ampère und R den Widerstand der Flüssigkeit in der Zersetzungszelle in Ohm bedeutet [1]).

Setzt man $\frac{\mathcal{E} f \vartheta}{10^8} = 0{,}000\,043\,4\,\vartheta = 1$, so erhält man $\vartheta = 23\,401$ als die einem Volt entsprechende Wärmetönung. Das heißt: wenn z. B. in einer Kette für jedes Zink-Aequivalent (32,7 Gramm), das aufgelöst wird, eine Wärmemenge von 23 401 (Gramm-Calorien) als positive Wärmetönung resultirt (also zum Umsatze in electrische Stromarbeit frei wird), so wird die Kette gerade die electromotorische Kraft von 1 Volt haben.

Wird der Zinkpol des Daniell'schen Elementes zur Erde abgeleitet, so ist der Werth des electrostatischen Potentials V auf dem Kupferpol [z. B. mit dem absoluten Electrometer gemessen (§. 84)] die electromotorische Kraft des Elementes in electrostatischem Maße, nämlich (nach 278) $V = D = 0{,}003\,627$, was auf Volt umgerechnet den bereits angegebenen Werth $0{,}003\,627 \times 300 = 1{,}088$ gibt.

Der Werth der Potentialfunction V auf einem Leiter im Vergleiche mit dem Potential auf der Erdoberfläche, das gleich Null angenommen wird, kann bekanntlich auch definirt werden als der Betrag der Arbeit, die aufgewendet werden muß, um eine Electricitätsmenge $= 1$ von der Erdoberfläche (auf irgend einem beliebigen Wege) auf jenen Leiter zu transportiren [2]), d. h. vom Potentialniveau 0 auf das Potentialniveau V zu erheben, vorausgesetzt, daß der ursprüngliche Potentialwerth V auf dem Leiter durch die hinzukommende Quantitätseinheit nicht merklich geändert wird. Der so berechnete Arbeitswerth

[1]) Für Kupfervitriol z. B. wäre nach vorstehenden Angaben (Formel 315) der Potentialverlust $H = 0{,}000\,043\,4 \times 27\,980 = 1{,}2$ Volt, wenn außer der Zersetzung des Kupfervitriols keine chemischen Processe stattfinden. Man nennt hier H die electromotorische Kraft der Polarisation. Findet keine Polarisation statt (z. B. bei Kupfervitriol zwischen zwei kupfernen Electroden), so wird wegen $\Sigma\vartheta = 0$ auch $H = 0$.

[2]) Vergl. Mascart (Wallentin), Handbuch der statischen Electricität, Bd. 1 (1. Abthl.), S. 280.

bedeutet Erg, wenn Potential und Quantität in absoluten Einheiten ausgedrückt sind, wie sich durch Multiplication der Dimensionsausdrücke sofort ergibt. (Siehe §. 36.)

93 **Electrische Sammler.** In ähnlicher Weise, wie bei den gewöhnlichen hydroelectrischen Ketten, hat man auch bei den Blei-Accumulatoren die electromotorische Kraft aus den Wärmetönungen zu berechnen versucht, die den bei der Entladung stattfindenden chemischen Processen entsprechen. Da jedoch die unter der Voraussetzung der einfachsten Vorgänge durchgeführten Berechnungen mit der Erfahrung nicht sehr gut übereinstimmen, und die Erörterung von weniger einfachen Hypothesen zu weitläufig wäre, wollen wie hier nicht darauf eingehen.

Die electromotorische Kraft eines geladenen Accumulators einige Zeit[1]) nach der Ladung (etwa 2,05 bis 2,08 Volt) und die electromotorische Kraft eines entladenen Accumulators einige Zeit nach der Entladung (etwa 1,95 bis 2,01 Volt) kommen einander ziemlich nahe und sind wenig von 2 Volt verschieden.

Die Klemmenspannung Δ beim Laden eines Accumulators von der electromotorischen Kraft E und dem inneren Widerstande U ist, wenn J den Ladestrom bedeutet,

$$\Delta = E + JU \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 316)$$

und wächst also, wenn man den Ladestrom verstärkt. Sie wächst aber auch bei constantem Ladestrome, weil die electromotorische Kraft während der Ladung zunimmt[2]).

Für die Klemmenspannung beim Entladen eines Accumulators gilt die Formel

$$\delta = e - iu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 317)$$

in der die gleichlautenden Buchstaben die analogen Bedeutungen haben, wie in der vorhergehenden Formel.

Die Entladungsspannung nimmt nicht nur bei wachsender, sondern auch bei constanter Stromstärke ab, da die electromotorische Kraft während der Entladung abnimmt.

Als normale Capacität betrachten Farbaky und Schenek jene, die sich ergibt, wenn ein vollständig geladener Accumulator bei normaler Strom-

[1]) D. i. nach einer oder einigen Stunden. Vergl. Schenek, Construction und Wirkungsweise der Accumulatoren. Budapest (1890) bei Friedrich Kilian, S. 22.

[2]) Bei den Tudor'schen Accumulatoren gilt als Regel, daß die Ladungsspannung während der ersten $^9/_{10}$ der Ladungsdauer bis auf etwa 2,4 Volt wächst und im letzten Zehntel, also verhältnißmäßig rasch, auf 2,65 und darüber (ich habe auch Endspannungen von 2,7 erhalten) ansteigt. Die zum Laden dienende Dynamomaschine (Nebenschlußmaschine) soll also eine Klemmenspannung von 2,4 Volt pro Zelle geben können.

stärke so lange entladen wird, bis die Klemmenspannung um 10 Proc. abgenommen hat.

In der That gilt die Regel: die Entladung eines Accumulators nicht weiter fortzusetzen, als bis seine Klemmenspannung auf 1,85 oder 1,80 Volt herabgegangen ist [1]).

Die normale Stromstärke, ausgedrückt in Ampère pro 1 kg Plattengewicht, ist für verschiedene Fabricate sehr ungleich. So wird z. B. im Taschenbuche „Hütte" (1899) für die Entladung 2,4 bis 2,9 Ampère pro 1 kg Plattengewicht als Regel angegeben, für Tudor-Accumulatoren aber nur 0,7. Farbaky und Schenek hatten für ihre Accumulatoren (von denen viele nach mehr als zehnjährigem Gebrauche noch in gutem Zustande waren) 1 Ampère für die Entladung und $^1/_3$ Ampère für die Ladung pro 1 kg Plattengewicht als Regel angegeben.

Bei der practischen Anwendung von Accumulatoren für den Lichtbetrieb pflegt man sie nicht bis zu einem 10procentigen Spannungsabfall zu entladen, weil schon nach 6 Proc. Spannungsabnahme der weitere Spannungsabfall zu rasch erfolgt. Dagegen ist bei der Anwendung der Accumulatoren zum Betriebe von Fahrzeugen (z. B. Trambahnwagen) die Entladung bis 10 Proc. Spannungsabfall ganz wohl zulässig.

Die Capacität ist in hohem Grade von der angewendeten Entladungsstromstärke abhängig. In dem bereits citirten Ingenieurs-Taschenbuche „Hütte" werden z. B. 4 bis 8 Ampèrestunden für kurze und 12 bis 15 Ampèrestunden für lange Entladungszeit als Capacität pro 1 kg Plattengewicht angegeben.

W. Peukert hat für den Zusammenhang zwischen der Capacität C in Ampèrestunden pro 1 kg Plattengewicht und Entladungsstromstärke J nach umfangreichen Untersuchungen die empirische Formel

$$J^n t = Const. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 318\,\text{I})$$

oder, wenn man $Jt = C$ einsetzt [2])

$$CJ^{n-1} = Const. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 318\,\text{II})$$

wobei die Werthe von n für verschiedene Fabricate zwischen 1,35 und 1,72 variiren und also nicht sehr weit von 1,5 abweichen. Die Formel wurde von Loppé an einer großen Zahl von Typen eingehend geprüft und gut mit den Versuchen stimmend befunden. Für $n = 1{,}66$ wird die Formel mit jener gleichlautend, die Schröder für Accumulatoren der Hagener Fabrik bei schneller Entladung gefunden hatte, nämlich $CJ^{5/3} = Const.$ Für langsame Entladungen gilt diese Formel nicht. Für diesen Fall hat Liebenow eine Formel von der Gestalt $C = \frac{a}{1 + bJ}$ aufgestellt. Die Schröder'sche

[1]) Siehe Uppenborn, Kalender 1902, S. 227.

[2]) Wobei also t die Dauer der Entladung in Stunden bedeutet.

Formel erfordert eine, die Libenow'sche zwei Capacitätsbestimmungen zur Ermittelung der Constanten [1]).

Unter dem „Wirkungsgrade" eines Accumulators versteht man die Größe

$$\frac{l}{L} = \frac{\int i \delta dt}{\int J \Delta dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 319)$$

bezüglich der electrischen Arbeit in Wattstunden, und die Größe

$$\frac{q}{Q} = \frac{\int i dt}{\int J dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 320)$$

bezüglich der Electricitätsmenge in Ampèrestunden. i, J, δ, Δ haben die bereits angegebenen Bedeutungen; dt stellt ein Stundendifferential vor; L und Q sind die bei der Ladung vom Accumulator aufgenommenen, l und q die bei der Entladung von demselben abgegebenen Beträge von Arbeit und Electricitätsmenge. Bei guten Accumulatoren beträgt der Wirkungsgrad bezüglich der Wattstunden circa 80 Proc. und bezüglich der Ampèrestunden circa 90 Proc., d. h. $\frac{l}{L} = 0{,}8$ und $\frac{q}{Q} = 0{,}9$ ungefähr. Hinsichtlich des Verfahrens bei der Ermittelung des Wirkungsgrades muß ich auf meine diesbezüglichen Abhandlungen verweisen [2]).

Schenek [3]) hat an speciellen Beispielen gezeigt, wie man das Säure- und Plattenvolumen eines Accumulators von bestimmter Leistungsfähigkeit berechnen kann. Diese Berechnungsart läßt sich verallgemeinern. Es sei w die Zahl der Wattstunden, die der Accumulator soll liefern können, ferner δ die durchschnittliche Klemmenspannung bei der Entladung und σ in Kilogrammen ausgedrückt das Quantum H_2SO_4, das für jede Ampèrestunde der Entladung verbraucht, also der Füllungsflüssigkeit entzogen wird. Ferner sei p_1 der ursprüngliche Procentgehalt der als Füllungsflüssigkeit dienenden verdünnten Schwefelsäure und p_2 der Procentgehalt bei Beendigung der Entladung. Endlich sei d_1 die anfängliche Säuredichte. Dann ist das erforderliche Säurevolumen v, wie man leicht findet, gegeben durch die Gleichung

$$v = \frac{w}{\delta}\,\sigma \cdot \frac{p_1}{p_1 - p_2} \cdot \frac{100}{p_1} \cdot \frac{1}{d_1} = \frac{w}{\delta}\,\sigma \cdot \frac{100}{p_1 - p_2} \cdot \frac{1}{d_1}.$$

---

[1]) Siehe Dolezalek, Die Theorie des Blei-Accumulators (1901), S. 87 bis 89.

[2]) Zeitschrift für Electrotechnik, Bd. 4 (1886), S. 242 bis 251 und Centralblatt für Electrotechnik, Bd. 11 (1889), S. 71 bis 76.

Hallwachs und Aron haben die Größe $\frac{\int i e dt}{\int J E dt}$ beziehungsweise „Nutzeffect", oder „Nutzeffect der chemischen Action" genannt. Vergl. Hoppe, Die Accumulatoren für Electricität, 2. Aufl. (1892), S. 205 bis 208.

[3]) Farbaky und Schenek, Ueber die electrischen Accumulatoren, Dingler's polytechn. Journ., Bd. 257 (1885). Separatabdruck S. 16.

Nimmt man nach Schenek σ[1]) $= 0{,}224$; $p_1 = 30$; $p_2 = 20$ und $d_1 = 1{,}223$, so erhält man, wenn man allenfalls noch anstatt der Wattstunden w die Ampèrestunden $\frac{w}{\delta} = a$ einführt,

$$v = 0{,}018\, a$$

Liter, also 18 Liter für 1000 Ampèrestunden.

Auch das Plattenvolumen v' läßt sich annähernd berechnen, wenn man eine bestimmte Capacität pro Gewichtseinheit, z. B. also 9 Ampèrestunden für 1 kg Plattengewicht, voraussetzt und einen ungefähren Werth für die mittlere Dichte der gefüllten Accumulatorplatten, z. B. etwa 6, annimmt. Bezeichnet man das gesammte Plattengewicht mit P, so ist nach den gemachten Voraussetzungen $a = 9\,P$ und $\frac{P}{v'} = 6$; folglich $v' = \frac{a}{6 \times 9}$ oder

$$v' = 0{,}018\, a.$$

Man erhält also unter den gemachten Voraussetzungen gleiche Werthe für Säurevolumen und Plattenvolumen. Regel ist, daß das Säurevolumen dem Plattenvolumen mindestens gleich sein soll.

In den meisten Fällen findet man es bedeutend größer, was auch zweckmäßig ist.

Schenek[2]) hat auch gezeigt, wie man die Formirungsarbeit berechnen kann. Wir wollen eine ähnliche Rechnung machen, zunächst unter der Annahme, daß sowohl die positiven als auch die negativen Platten Bleiglätte (PbO) als Füllmasse enthalten. Wir rechnen die Aequivalente in Grammen und berechnen die Formirungsarbeit vorerst für 1 kg Füllmasse, d. i. also für $\frac{1000}{111} = 9$ Aequivalente, da PbO $= 111$ (nämlich Pb $= 103$ und O $= 8$) zu setzen ist. — Nun wissen wir aus §. 40, daß die Electricitätsmenge $= 1$ Ampèrestunde $0{,}037 = \frac{1}{27}$ Aequivalent umsetzt (zerlegt oder ausscheidet), demnach sind zum Umsatze von 9 Aequivalenten $9 \times 27 = 243$ Ampèrestunden erforderlich. Da nun aber bei der gleichzeitigen Formirung der positiven und negativen Platten an den positiven 1 kg PbO in PbO_2 verwandelt wird, während an den negativen 1 kg PbO in Pb (Bleischwamm) übergeht, so ver-

---

[1]) Siehe die citirte Abhandlung von Farbaky und Schenek. Separatabdruck S. 13.

Näheres über diese und ähnliche Rechnungen enthält meine Abhandlung: Berichte und Bemerkungen über Accumulatoren u. s. w. Centralblatt für Electrotechnik, Bd. 10 (1888), S. 158.

[2]) S. 18 des Separatabdruckes der bereits citirten Abhandlung im 257. Bde. (1885) des Dingler'schen polytechnischen Journales.

theilen sich obige 243 Ampèrestunden auf 2 kg Füllmasse, folglich kommen auf 1 kg Füllmasse nur 121,5 Ampèrestunden. Dies macht 272 Wattstunden, wenn man die Klemmenspannung beim Formiren nach Schenek mit dem Mittelwerthe 2,24 Volt in Rechnung bringt.

Nach Farbaky und Schenek kann man annehmen, daß von der aufgewendeten Formirungsarbeit mindestens 40 Proc. durch Gasentwickelung verloren gehen. Andererseits aber kommt in Betracht, daß nicht die ganze in den Platten vorhandene Füllmasse formirt wird.

Aus der Formirungsarbeit, die Farbaky und Schenek in einem speciellen Falle wirklich aufgewendet haben, ergibt sich ein Erforderniß von 141 Ampèrestunden, also 316 Wattstunden für 1 kg Füllmasse.

Als theoretisches Zeiterforderniß zur Formirung eines Accumulators ergibt sich aus diesen Zahlen eine ununterbrochene Arbeitszeit von etwas mehr als fünf Tagen.

Aus den vorstehenden Zahlen ist ferner noch ersichtlich, daß einem beiderseits mit Bleiglätte gefüllten Accumulator unter der Voraussetzung einer vollständigen Formirung der gesammten Füllmasse und unter der weiteren Voraussetzung einer vollständigen Entladung, bei der also die gesammte Füllmasse beider Electroden in Bleisulphat ($PbSO_4$) überginge, eine Capacität von rund 121 Ampèrestunden für 1 kg Füllmasse entsprechen würde. Nimmt man an, daß das Gewicht der Füllmasse ungefähr die Hälfte des Plattengewichtes oder etwa ein Drittel des Gesammtgewichtes ausmacht, dann beträgt die soeben berechnete Maximalcapacität rund 60 Ampèrestunden für 1 kg Plattengewicht oder rund 40 Ampèrestunden für 1 kg Gesammtgewicht, also ungefähr das Siebenfache derjenigen, die Accumulatoren von verhältnißmäßig großer Capacität wirklich liefern.

Farbaky und Schenek haben von einem übermäßig entladenen Accumulator, bei dem das Gewicht der Füllmasse 46 Proc. des Plattengewichtes betrug, 22 Ampèrestunden für 1 kg Plattengewicht erhalten, also beiläufig ein Drittel von der theoretisch berechneten Maximalcapacität.

IV. Abschnitt.

94 **Galvanometer.** Jede meßbare Wirkung des electrischen Stromes, die als Function der Stromstärke bekannt ist, kann zu deren Messung dienen. In der That hat man die Wirkung von Stromleitern auf bewegliche Magnete, ferner die bewegende Wechselwirkung zweier Stromleiter, dann die Wärmewirkungen und endlich auch die chemischen Wirkungen des electrischen Stromes

dazu benutzt, und ſo haben wir denn auch vier Gattungen von Strommeſſern zu unterſcheiden, nämlich 1. die electromagnetiſchen, 2. die electrodynamiſchen, 3. die Hitzdraht-Strommeſſer und 4. die electrochemiſchen Strommeſſer (gewöhnlich Voltameter genannt).

Bei den electromagnetiſchen Galvanometern beobachtet man entweder unmittelbar die vom ſtromleitenden Gewinde oder Ringe bewirkte Ablenkung eines beweglichen Magneten (Nadel oder Glockenmagnet) aus dem magnetiſchen Meridian und mißt alſo einen Ablenkungswinkel (z. B. Tangentenbuſſole), oder man dreht das ſtromleitende Gewinde der abgelenkten Nadel nach, bis deren magnetiſche Axe wieder in der Windungsebene liegt, und mißt dann den Drehungswinkel des Gewindes (z. B. Sinusbuſſole), oder aber man macht die Ablenkung des Galvanometermagneten durch eine Federkraft rückgängig, indem man einer am Galvanometermagnet angebrachten und den Aufhängungsfaden umgebenden feinen Spiralfeder durch Drehen an einer eigenen Torſionsvorrichtung eine entſprechende Spannung ertheilt, wobei man alſo dann einen Torſionswinkel der Spiralfeder mißt (z. B. Torſionsgalvanometer von Siemens & Halske).

Für alle electromagnetiſchen Galvanometer ohne Torſionsvorrichtung gilt die von Poggendorff bei der Beſchreibung ſeiner Graduirungsmethode [1]) aufgeſtellte Gleichung $iMf(n) = HM\sin(n + m)$ oder

$$i = \frac{H}{f(n)} \cdot \sin(n + m) \quad \ldots\ldots \quad 321)$$

wobei i die Stromſtärke, M das magnetiſche Moment der Nadel und H die erdmagnetiſche Horizontalintenſität bedeuten, ferner n den Winkel, den die magnetiſche Axe der Nadel mit der Windungsebene des Gewindes bildet, und m den Winkel, den dieſe Windungsebene mit dem magnetiſchen Meridian einſchließt. Der Ausdruck $iMf(n)$ ſtellt das Drehungsmoment dar, das das ſtromleitende Gewinde auf die Nadel ausübt, und der Ausdruck $HM\sin(n + m)$ das im entgegengeſetzten Sinne vom Erdmagnetismus auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment.

Bei der Tangentenbuſſole wird der Ring ſo eingeſtellt, daß $m = o$ iſt. Ferner iſt das vom ſtromleitenden Ringe auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment, folglich auch die Function $f(n)$ offenbar dem Coſinus des Ablenkungswinkels ſehr nahe proportional; man kommt alſo, da das erdmagnetiſche Drehungsmoment dem Sinus des Ablenkungswinkels proportional iſt, hier auf eine Gleichung von der Form

$$i = CH.tgn \quad \ldots\ldots \quad 322)$$

[1]) Poggendorff's Annalen der Phyſik und Chemie, 56. Bd. (1842): Ueber den Gebrauch der Galvanometer als Meßwerkzeuge.

Die Größe CH, deren Factor C wir ſpäter aus den Dimenſionen des Inſtrumentes ermitteln werden, heißt der Reductionsfactor und iſt, wie man ſieht, von der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus, nicht aber vom magnetiſchen Momente der Nadel abhängig.

Bei dem Gebrauche der Sinusbuſſole wird, wie bereits bemerkt worden iſt, $n = 0$ gemacht, indem man das Gewinde aus der Ebene des magnetiſchen Meridians um den hierzu erforderlichen Winkel m der abgelenkten Nadel nachdreht. Dadurch ergibt ſich aus 321 für die Sinusbuſſole die Formel

$$i = \frac{H}{f(0)} \cdot \sin m \text{ oder}$$

$$i = cH \,.\, \sin m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 323)$$

wobei alſo cH der Reductionsfactor der Sinusbuſſole iſt, der auch wieder von der Horizontalintenſität des Erdmagnetismus, nicht aber vom magnetiſchen Momente der Nadel abhängt. Der Factor $c = \frac{1}{f(0)}$ bei der Sinusbuſſole kann aber aus ihrer Conſtruction nicht ſo einfach wie der Factor C bei der Tangentenbuſſole, und in den meiſten Fällen überhaupt nicht durch Rechnung ermittelt werden.

Bei dem gewöhnlichen (Schweigger-Poggendorff'ſchen) Multiplicator bleibt $m = 0$ und alſo $\sin(n + m) = \sin n$, wodurch die Gleichung 321 übergeht in

$$i = \frac{H}{f(n)} \cdot \sin n \quad \ldots\ldots\ldots \quad 324)$$

oder $i = H \frac{\sin n}{f(n)} = HF(n)$, woraus wieder die Abhängigkeit der Angaben des Inſtrumentes von der Horizontalintenſität des Erdmagnetismus, nicht aber vom magnetiſchen Momente der Nadel erſichtlich iſt, wie ſchon aus der Grundgleichung 321 für alle derartigen Inſtrumente ohne Torſion hervorgeht. Die Function $F(n)$ kann beim Multiplicator nicht durch Rechnung ermittelt werden, doch führt das von Poggendorff angegebene Graduirungsverfahren zu einer Tabelle, die die Kenntniß dieſer Function erſetzt, und man kann dann, wenn der bei der Graduirung benutzte conſtante Strom nach abſolutem Maße bekannt iſt, mit dem Multiplicator auch abſolute Strommeſſungen ausführen.

Für die bisher beſprochenen Galvanometer iſt noch folgendes bemerkenswerth. Mißt man einen conſtanten Strom, ſo kann man den erſten Ausſchlag der Galvanometernadel als den doppelten Werth der bleibenden Ablenkung betrachten. Bei der Meſſung von ſogenannten momentanen Strömen („Stromſtößen"), d. h. von Strömen, deren Dauer im Vergleiche mit der Schwingungsdauer der Nadel ſehr kurz iſt, kann man die Stromſtärke dem Sinus des halben Ausſchlagwinkels proportional ſetzen.

Das ballistische Galvanometer mit astatischem Magnetsystem von sehr großer Schwingungsdauer (etwa 10 bis 20 Secunden) ist insbesondere zur Messung von Stromstößen (z. B. inducirter Ströme) geeignet. Da das Instrument stets mit Spiegelablesung (§. 96) versehen ist, kommen nur kleine Ausschlagwinkel in Betracht, die jedoch als Ablenkungen des Spiegelbildes einer Scala in großem Maßstabe sichtbar werden. Der Scalenausschlag s eines solchen Instrumentes ist dann proportional der Electricitätsmenge Q, die während des kurz dauernden Stromes durch das Galvanometergewinde gegangen ist. In dem einfachsten Falle, daß keine Dämpfung (§. 97) vorhanden wäre, gälte die folgende Formel, die wir bei sehr schwacher Dämpfung als nahezu richtig ansehen können,

$$Q = C\frac{\vartheta}{\pi}\cdot s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 325)$$

Hier bedeutet Q die gemessene Electricitätsmenge in Coulomb, wenn C die Stärke eines constanten Stromes in Ampère vorstellt, der eine dauernde Scalenablenkung $s = 1$ bewirkt, und ϑ die Schwingungsdauer des Galvanometer-Magneten ohne Dämpfung ist.

Im Allgemeinen gilt für das ballistische Galvanometer die Formel

$$Q = C\frac{\vartheta}{\pi}\cdot f(k)\,.\,s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 326)$$

wobei $f(k)$ eine Function des Dämpfungsverhältnisses (S. 209), nämlich

$$f(k) = k^{\frac{1}{\pi}\,arctg\,\frac{\pi}{\Lambda}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 327)$$

wobei $\Lambda = log\ nat\ k$, also für schwache Dämpfung (Λ nahezu $= 0$) $arctg\,\frac{\pi}{\Lambda} = \frac{\pi}{2}$, somit $f(k) = \sqrt{k}$ und

$$Q = C\frac{\vartheta}{\pi}\cdot\sqrt{k}\,.\,s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 328)$$

Für $\sqrt{k}$ kann auch $1 + \frac{\Lambda}{2}$ eingesetzt werden [1]).

Beim Torsionsgalvanometer kommt kein erdmagnetisches Drehungsmoment in Betracht, weil die magnetische Axe des Glockenmagneten stets in den magnetischen Meridian zurückgedreht wird. Dabei ist eine dem Torsionswinkel φ proportionale Federkraft mit einem Drehungsmomente $C\varphi$ wirksam, das dem entgegengesetzt wirkenden Drehungsmomente $iM\,.\,f(0)$ das Gleichgewicht halten muß. Aus $C\varphi = iMf(0)$ folgt dann

---

[1]) Näheres über das ballistische Galvanometer und dessen Gebrauch enthält F. Kohlrausch, Lehrbuch der practischen Physik (1901), S. 365, 448, 452.

$$i = \frac{C}{Mf(0)} \cdot \varphi = k\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 329)$$

aus der hervorgeht, daß der Reductionsfactor k des Torsionsgalvanometers, im Gegensatze zu den bisher beschriebenen Galvanometern, vom magnetischen Momente des Glockenmagneten, nicht aber vom Erdmagnetismus (der hier kein Drehungsmoment ausüben kann) abhängig ist. In der That nimmt das magnetische Moment des Glockenmagneten ab [1]) und muß deßhalb die Constante k von Zeit zu Zeit durch eine neue Aichung [2]) bestimmt werden.

Das Electrodynamometer (Siemens & Halske) ist dem soeben besprochenen Torsionsgalvanometer analog, doch ist der Glockenmagnet durch den rahmenförmigen beweglichen Stromleiter ersetzt, auf den der von demselben Strome durchflossene (aus mehreren Windungen bestehende) feste Stromleiter ein dem Quadrate der Stromstärke proportionales Drehungsmoment ausübt. Wird dieses, so wie beim Torsionsgalvanometer, durch Torsion einer Spiralfeder aufgehoben und der bewegliche Stromleiter auf diese Art wieder in seine ursprüngliche Lage gegenüber dem festen Stromleiter zurückgedreht, so halten sich die beiden Drehungsmomente, deren eines dem Quadrate der Stromstärke, das andere (wie beim Torsionsgalvanometer) dem Torsionswinkel proportional ist, das Gleichgewicht und es besteht also zunächst die Gleichung $C_1 \cdot i^2 = C_2\varphi$, woraus, wenn wir $\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = a$ setzen,

$$i = a\sqrt{\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 330)$$

folgt. Auch hier muß der Reductionsfactor a durch Aichung ermittelt werden. Im Uebrigen sei noch folgendes bemerkt. Da das Drehungsmoment $C_1 i^2$ dem Quadrate der Stromstärke proportional ist, ist es von der Richtung des Stromes unabhängig, weßhalb das Electrodynamometer nicht nur zur Messung von Gleichströmen, sondern auch zur Messung von Wechselströmen benutzt werden kann.

Bei den Hitzdraht-Galvanometern (Cardew, Hartmann u. Braun) wird die durch die Erwärmung beim Stromdurchgange bewirkte Verlängerung eines dünnen Drahtes (Platinsilber) durch einen Mechanismus, der jenem beim Sauſſure'schen Haarhygrometer ähnlich ist, auf einen Zeiger übertragen [3]). Beim Voltmeter nimmt der mit einem passenden Zusatzwiderstande (aus Con-

[1]) Nach Kittler (I, 156) nimmt das Moment jährlich um 1,3 Proc. bis 1,5 Proc. ab.

[2]) Näheres hierüber enthält meine Abhandlung über das Torsionsgalvanometer. Centralblatt für Electrotechnik 1886, S. 579.

[3]) Wir haben im Folgenden nur die Hitzdrahtinstrumente von Hartmann und Braun im Auge, die nicht nur als Voltmeter, sondern auch als Ampèremeter ausgeführt werden.

stantan) versehene Hitzdraht den durch die Spannung Δ an den Klemmen des Instrumentes erzeugten Strom $i = \frac{\Delta}{g + z}$ auf, wobei g den Widerstand des Hitzdrahtes und z den noch viel größeren Zusatzwiderstand bedeutet. An der Scala wird aber nicht dieser Strom, sondern die ihm entsprechende Spannung

$$\Delta = i(g + z) = iG \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 331)$$

angezeigt [1]).

Beim Hitzdraht-Ampèremeter ist der Hitzdraht (g) mit seinem Zusatzwiderstande (z) noch mit einem Nebenschlusse vom Widerstande

$$s = \frac{g + z}{n - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 332)$$

versehen, wenn die maximale Stromstärke $\overline{J}$ für die das Ampèremeter bestimmt ist, $n$mal so groß sein soll wie die maximale Stromstärke $\overline{i}$ die der Hitzdraht verträgt, d. h. mit der er im Voltmeter höchstens beansprucht wird. Der Widerstand des Ampèremeters ist dann

$$G' = \frac{G}{n} = \frac{g + z}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 333)$$

Durch diesen Widerstand hätte man die Spannungsangaben Δ des in der beschriebenen Weise durch Anbringung eines Nebenschlusses in ein Ampèremeter verwandelten Voltmeters zu dividiren, um die Intensitäten

$$J = \frac{\Delta}{G'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 334)$$

der durchgehenden Ströme zu erhalten [2]).

Die Ausdehnung des Hitzdrahtes wird durch die Stromwärme bewirkt, die nach dem Joule'schen Gesetze (§. 39, Formel 103, Anmerkung) in jedem Zeitelemente dt den Betrag

$$dQ = A g i^2 dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 335)$$

---

[1]) Der Widerstand des Instrumentes $G = g + z$ beträgt etwa 500 Ohm, wovon jedoch der Hitzdrahtwiderstand g nur etwa 3 Proc. ausmacht. Es ist darauf angetragen, daß der Strom i bei 100 Volt nicht über 0,2 Ampère sei.

[2]) Wäre z. B. $\overline{\Delta} = 100$ die Maximalspannung, die das Voltmeter von $G = g + z = 500\ \Omega$ Widerstand anzeigt und soll daraus ein Ampèremeter für die maximale Stromstärke $\overline{J} = 100\ \overline{i} = 100\ \frac{\overline{\Delta}}{G} = 100 \times 0{,}2 = 20$ Ampère werden, so wäre $s = \frac{500}{100 - 1} = 5{,}0\dot{5}\ \Omega$ der anzubringende Nebenschluß und der Widerstand des so erhaltenen Ampèremeters $G' = \frac{Gs}{G + s} = 5\ \Omega$. Demnach entspräche z. B. nach Formel 295 der Voltmeteranzeige $\Delta = 60$ die Stromstärke $J = \frac{60}{5} = 12$.

ausmacht [1]). Diese dem Quadrate der Stromstärke proportionale Größe ist von der Stromrichtung unabhängig, weßhalb die Hitzdrahtgalvanometer sowie die Electrodynamometer nicht nur für Gleichstrom, sondern auch für Wechselstrom verwendbar sind.

Bei den electrolytischen Strommessern oder Voltametern wird die Electrolyse des Wassers (Schwefelsäurehydratlösung) oder einer Kupfervitriollösung oder endlich einer Silbernitratlösung zur Messung der Stromstärke benutzt, wobei die am Schlusse des §. 40 angeführten Zahlen als Grundlage dienen. Nach diesen entwickelt der Strom von 1 Ampère in einer Minute 10,44 cm^3 Knallgas [2]), oder fällt in runder Zahl 20 Milligramm Kupfer oder 67 Milligramm Silber aus. Beim **Wasservoltameter** oder **Knallgasvoltameter** wird eine 10- bis 20procentige reine Schwefelsäurelösung zwischen blanken Platinelectroden zersetzt und bei schwachen Strömen nur das entwickelte Wasserstoffgas, bei starken Strömen das Knallgas als Ganzes gemessen [3]). Die beiden anderen Voltameter (Cu und Ag) werden auch **Gewichtsvoltameter** genannt. Beim **Kupfervoltameter** wird eine beinahe gesättigte Kupfersulfatlösung zwischen kupfernen Electroden electrolysirt und die Gewichtszunahme der Kathode (die auch aus Platin sein kann) ermittelt. Stromdichte nicht über 4 Ampère pro dm^2. — Das **Silbervoltameter** enthält in einem als Kathode dienenden Tiegel aus Silber oder Platin eine 15- bis 30procentige Silbernitratlösung, in die ein als Anode dienendes Stäbchen aus reinem Silber taucht. Geringe Stromdichte.

Ist im Knallgasvoltameter das reducirte Knallgasvolumen v' in t Minuten bei constantem Strome ausgeschieden worden, so war die Stromstärke in Ampère

$$J = \frac{v'}{10{,}44\,t} = 0{,}0958\,\frac{v'}{t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 337)$$

Für das Kupfervoltameter ist

$$J = \frac{M}{19{,}766\,t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 338)$$

und für das Silbervoltameter

---

[1]) Hier bedeutet g den Widerstand des Hitzdrahtes in Ohm und i die Stärke des den Hitzdraht durchfließenden Stromes in Ampère, also gi^2 die Stromleistung in Watt und endlich $A = 0{,}24$ Grammcalorien die einem Joule entsprechende Wärmeentwicklung. Siehe die Formeln 35 und 36.

[2]) Auf 0° C. Temperatur und 760 mm Hg-Druck reducirt mittelst der Formel: reducirtes Volumen

$$v = v' \frac{b}{760} \frac{273}{273 + t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 336)$$

worin v', b und t die gemessenen Werthe für Volumen, Druck (Hg bei 0° C.) und Temperatur in C. sind. Siehe meine Grundzüge der mechanischen Physik, S. 171.

[3]) Siehe hierüber und über Voltameter überhaupt F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik 1887, S. 374.

$$J = \frac{M}{67{,}085\, t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 339)$$

wenn M das binnen t Minuten ausgefällte Metallgewicht in Milligrammen bedeutet.

Die Voltameter werden vornehmlich zur Aichung der electromagnetischen und der electrodynamischen Galvanometer verwendet.

Richtigkeit, Genauigkeit und Empfindlichkeit. Die Richtigkeit 95
eines Galvanometers beruht auf der fehlerfreien Construction und technischen Ausführung des Instrumentes, entsprechend den theoretisch begründeten Vorschriften hinsichtlich des Materiales, der Abmessungen und der Anordnung aller Theile. Hierher gehört also z. B. auch die Vermeidung von Centrirungs-, Collimations- und Theilungsfehlern. Wir werden bei der Besprechung der Tangentenbussole hinsichtlich der Nadellänge und Anordnung des Stromleiters darauf zurückkommen.

Die Genauigkeit eines mit Kreistheilung versehenen Galvanometers ist desto größer, je kleiner die Bruchtheile eines Grades sind, die man noch ablesen oder sicher schätzen kann. Bei einer Kreistheilung (in ganze Grade ohne Untertheilung) von etwa einem Decimeter Durchmesser kann man Zehntelgrade noch leicht mit Sicherheit schätzen. Mit Hilfe der später zu besprechenden Spiegelablesung kann man wohl eine etwa hundertmal größere Genauigkeit erreichen.

Hinsichtlich der Empfindlichkeit eines Galvanometers sei folgendes bemerkt[1]). Bewirkt eine Stromesänderung di eine Aenderung $d\alpha$ der beobachteten Größe, also z. B. des Ablenkungswinkels, so kann man das Verhältniß $\frac{d\alpha}{di}$ als Maß der absoluten Empfindlichkeit des Galvanometers ansehen, oder, falls die Galvanometerfunction[2]) $i = f(\alpha)$ bekannt ist, den reciproken Werth des ersten Differentialquotienten dieser Function, nämlich $\frac{1}{f'(\alpha)}$.

Dagegen ist die relative Empfindlichkeit des Galvanometers bestimmt durch das Verhältniß

$$d\alpha : \frac{di}{i} = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

W. Weber's Angabe, daß die Tangentenbussole bei 45° Ablenkung am empfindlichsten ist, bezieht sich also im Sinne der Definitionen Kittler's auf

[1]) Nach Kittler (I, 130).

[2]) F. Kohlrausch versteht unter „Galvanometerfunction" etwas Anderes, nämlich das Drehmoment des Stromes = 1 auf eine Nadel vom Momente = 1 (Practische Physik, S. 449).

die relative Empfindlichkeit. Es ist nämlich bei der Tangentenbussole (Formel 322)

$f(\alpha) = k\,tg\,\alpha$, also $f'(\alpha) = \frac{k}{cos^2\alpha}$ folglich

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = sin\alpha \,.\, cos\,\alpha = \frac{1}{2}\, sin\, 2\,\alpha,$$

welche Größe in der That für $\alpha = 45^0$ ihren größten Werth hat.

Bei Spiegelgalvanometern ist zur Beurtheilung der Empfindlichkeit natürlich auch der Scalenabstand in Betracht zu ziehen, und man gibt in diesem Sinne allenfalls den Stromwerth an, der bei 1 Meter Scalenabstand noch 1 Millimeter Ausschlag bewirkt.

96 **Spiegelablesung. Astasirung.** Zur Erhöhung der Genauigkeit eines Galvanometers ist eine von J. C. Poggendorff zuerst (1826) angegebene und von C. F. Gauß zuerst (1833) angewendete Einrichtung, die man Spiegelablesung nennt, in hohem Grade geeignet. Wir wollen aber dabei sogleich bemerken, daß diese Ablesungsart sehr kleine Ablenkungswinkel voraussetzt.

Gegenüber einem kleinen leichten Spiegelchen[1]), das mit dem Galvanometermagneten (Nadel) (gewöhnlich oberhalb desselben) parallel seiner Drehungsaxe verbunden ist, steht ein gegen das Spiegelchen gerichtetes Fernrohr, unter dessen Objectiv eine (in Centimeter und Millimeter getheilte) Scala in guter Beleuchtung so angebracht ist, daß man ihr vom Galvanometerspiegel erzeugtes Bild deutlich in dem (freilich nur auf einen kleinen Theil der 1 m langen Scala beschränkten) Gesichtsfelde des Fernrohres sieht, wobei man die Einstellung so zu machen pflegt, daß das Bild eines ungefähr in der Mitte der Scala liegenden Theilstriches in der Mitte des Gesichtsfeldes (d. i. am verticalen Faden des Fadenkreuzes) einsteht, solange der Galvanometerspiegel in Ruhe ist. Findet dann durch einen zu messenden constanten Strom eine bleibende Ablenkung in der Art statt, daß jetzt das Bild eines Theilstriches, der von dem vorhin besagten „mittleren Theilstriche" um s Millimeter absteht, in der Mitte des Gesichtsfeldes ist, so ist der Ablenkungswinkel v des Spiegels gegeben durch die Gleichung

$$\frac{s}{a} = tg\, 2\, v \quad \ldots\ldots\ldots \quad 340)$$

wenn a den Abstand zwischen Spiegel und Scala in Millimetern bedeutet. Mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Kleinheit von v kann man annähernd auch

[1]) Ein kleiner magnetirter Stahlspiegel kann zugleich auch als Galvanometermagnet dienen und anstatt der subjectiven Beobachtung im Fernrohr kann auch eine objective durch Projection eines Flammenbildes auf die Scala eingerichtet werden.

$\frac{s}{a} \doteq 2\psi$ oder $\psi \doteq \frac{s}{2a}$ setzen und, wenn man ψ in Graden ausdrückt

$$\psi^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{s}{2a} = 57{,}3 \frac{s}{2a} \quad \ldots \ldots \quad 341)$$

Demnach entspricht einem Grade Spiegelablenkung bei $a = 3$ m eine Verschiebung des Scalenbildes um mehr als 100 mm. Da man nun Zehntelmillimeter noch ganz gut schätzen kann, so kann man sagen, daß die Genauigkeit der beschriebenen Spiegelablesung in diesem Falle bis auf Tausendstel Grade reicht.

Als Hilfsmittel zur Vergrößerung der Empfindlichkeit eines Galvanometers sind drei Arten der Astasirung zu erwähnen. Unter Astasirung versteht man die Verminderung der Richtkraft des Galvanometermagneten, nämlich die Verminderung des dem ablenkenden Drehungsmomente des zu messenden Stromes entgegengesetzten erdmagnetischen Drehungsmomentes. Sehr sinnreich und einfach hat diesen Zweck L. Nobili (1825) mit seinem astatischen Nadelpaare erreicht, das aus zwei parallelen miteinander fest verbundenen Magnetnadeln besteht, deren Pole entgegengesetzt liegen. Die untere Nadel befindet sich innerhalb, die obere (die gewöhnlich die stärker magnetisirte ist) außerhalb des Multiplicatorgewindes. Durch diese Anordnung wird eine Schwächung des erdmagnetischen bei gleichzeitiger Verstärkung des vom Strome ausgeübten Drehungsmomentes herbeigeführt, da jenes der Differenz, dieses aber nahezu der Summe der magnetischen Momente beider Nadeln proportional ist [1]). Die beiden Nadeln dürfen nicht gleich stark sein, da das Nadelpaar eine gewisse Richtkraft immerhin besitzen muß. Bei zu geringer Richtkraft (zu großer Astasie) kommt es vor, daß das Nadelpaar nach Unterbrechung eines ablenkenden Stromes nicht mehr in die dem magnetischen Meridiane entsprechende Gleichgewichtslage zurückkehrt, sondern eine sogenannte diagonale Gleichgewichtslage zum Multiplicatorgewinde einnimmt. Diese, von einem Eisengehalte des Kupfers der Drahtwindungen oder ihrer Umhüllung herrührende Anomalie kann durch Verminderung des astatischen Zustandes behoben werden, indem man entweder den Magnetismus der oberen Nadel verstärkt oder in der Nähe (meist oberhalb) des Galvanometers ein verstellbares Magnetstäbchen so anbringt, daß es übereinstimmend mit dem Erdmagnetismus und im richtigen Maße auf das Nadelpaar einwirkt (Hauy'scher Stab) [2]).

[1]) Diese Summenwirkung wird vollständig erzielt, wenn zwei gleiche Galvanometergewinde mit parallelen Windungsebenen vertical übereinander angebracht sind, in deren einem die untere und in deren anderem die obere Nadel sich befindet. Am Verbindungsstäbchen beider Nadeln kann (bei hinreichender Entfernung der Drahtrollen übereinander) der Galvanometerspiegel angebracht sein. (Wüllner, III, 1041.)

[2]) In der Regel dient der Hauy'sche Stab dem entgegengesetzten Zwecke, nämlich zur Erhöhung der Empfindlichkeit durch Steigerung der Astasie, wovon später die Rede sein wird.

Ein zweites Hilfsmittel der Astasirung beruht auf der magnetischen Schirmwirkung des Eisens und besteht in der Anbringung eines das Galvanometer umgebenden eisernen Schutzringes oder Ringmantels[1]) von entsprechenden Abmessungen, der die erdmagnetischen Kraftlinien größtentheils in sich aufnimmt und also deren nur wenige zum Galvanometermagneten gelangen läßt[2]). Er ist nämlich als ein um das Galvanometer herumgelegter ringförmiger Magnet anzusehen, der unter der Einwirkung des Erdmagnetismus auf der Nordseite seinen Nordpol und auf der Südseite seinen Südpol angenommen hat und sonach in entgegengesetztem Sinne mit dem Erdmagnetismus auf das Galvanometer wirken muß.

Ein drittes Astasirungsverfahren besteht in der Anwendung des schon bei der Besprechung der astatischen Doppelnadel erwähnten Hauy'schen Magnetstabes, der die Richtkraft des Galvanometermagneten vermindert oder vermehrt, je nachdem deren Pole übereinstimmend oder entgegengesetzt liegen. Zugleich kann der Hauy'sche Magnetstab auch als Richtmagnet zum Einstellen des Galvanometerspiegels dienen. Eine noch weiter vervollkommnete Anwendung von derartigen Hilfsmagneten findet man am F. Weinhold'schen Spiegelgalvanometer[3]). Unterhalb dieses Instrumentes befindet sich nämlich ein System von zwei unter beliebigem Winkel sich kreuzenden Magnetstäbchen in horizontaler Ebene drehbar angebracht, mittelst dessen man nicht nur die Richtkraft des Galvanometermagneten innerhalb weiter Grenzen verändern, sondern auch dessen richtige Einstellung herbeiführen kann.

97 **Dämpfung. Aperiodischer Zustand.** Um zu bewirken, daß der Galvanometermagnet schon nach wenigen rasch abnehmenden Schwingungen in der der ablenkenden Stromstärke entsprechenden Gleichgewichtslage zur Ruhe komme, hat man an den Galvanometern besondere Einrichtungen, Dämpfungen genannt, angebracht, bei denen der Magnet des Galvanometers unter dem Einflusse von künstlich hervorgerufenen Bewegungshindernissen seine Schwingungen vollbringen muß, sei es, daß man dabei den Widerstand eines Mittels zu Hilfe nimmt („Luftdämpfung"; die „Flüssigkeitsdämpfung" ist für Galvanometer wenig geeignet)[4]) oder, daß man die dem Lenz'schen Gesetze entsprechende

[1]) Von F. Braun zuerst angewendet. (Wüllner, III, 1040.)

[2]) Die magnetische Schirmwirkung beruht, so wie die electrische, auf Lehrsätzen der Potentialtheorie, die sich als Folgesätze aus dem Theorem von Green ergeben. (Siehe z. B. Briot, Lehrbuch der mechanischen Wärmetheorie und meinen Grundriß der mechanischen Physik.)

[3]) Siehe Electrotechnische Zeitschrift, 6. Bd. (1885), S. 513.

[4]) Für die Luftdämpfung (Töpler, v. Ettingshausen) sind Glimmerflügel (oberhalb oder unterhalb des Galvanometermagneten mit diesem verbunden) vorzüglich geeignet. Bei dem sogenannten „dead-beat-Galvanometer" (W. Thomson) dient der in enger Kapsel schwingende Galvanometerspiegel selbst als Luftdämpfung. —

Rückwirkung inducirter Ströme benutzt, die durch den schwingenden Magnet in benachbarten Metallmassen hervorgerufen werden (electrodynamische Dämpfung).

Eine dämpfende Wirkung übt schon der Kupferdraht des Galvanometergewindes, wenn dieses geschlossen ist, aus. Zur Verstärkung der Dämpfung dienen kupferne Hülsen, Dämpfer genannt, die nach Erforderniß in das Gewinde eingeschoben werden können, oder bleibend darin angebracht sind.

Sind die zwischen je zwei zeitlich aufeinander folgenden Umkehrpunkten des schwingenden Galvanometermagneten beobachteten (nämlich an der Scala abgelesenen) Schwingungsweiten (Amplituden), z. B. α_1, α_2, α_3 . . . α_n, so ist

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \ldots \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = k$$

das sogenannte Dämpfungsverhältniß, oder genauer

$$k = \sqrt[n-1]{\frac{\alpha_1}{\alpha_n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 342)$$

Der $log\ nat\ k = \Lambda = \frac{log\ nat\ \alpha_1 - log\ nat\ \alpha_n}{n-1}$ ist das von Gauß so genannte logarithmische Decrement, nämlich die constante Abnahme der Logarithmen der aufeinander folgenden Amplituden.

Die Dämpfung eines Galvanometers kann auch so beschaffen sein, daß der Galvanometermagnet, wenn man ihn aus einer Elongation in seine Gleichgewichtslage zurückkehren läßt, diese gar nicht mehr überschreitet, also auch überhaupt keine Schwingungen mehr macht. Bei einem solchen Galvanometer, das man aperiodisch nennt, wird sich also die durch einen Strom abgelenkte Magnetnadel schon bei ihrem ersten Ausschlage in die der Stromstärke entsprechende Ablenkung einstellen, ohne weitere Schwingungen zu machen.

Die Möglichkeit eines aperiodischen Zustandes hat schon Gauß auf dem Wege der Rechnung entdeckt und eine mathematische Theorie dafür gegeben, die später von E. du Bois-Reymond weiter ausgebildet worden ist [1]). Die wirkliche Herstellung eines aperiodischen Galvanometers [2]) ist zuerst Werner Siemens gelungen, indem er seinen (cylindrischen) „Glockenmagnet" erfand, für den eine cylindrisch ausgebohrte kupferne Kugel als Dämpfer dient. Der Glockenmagnet ermöglicht durch sein verhältnißmäßig geringes Trägheitsmoment

---

Bei Quadrantenelectrometern sind Dämpfer mit Platinflügeln in Schwefelsäure gebräuchlich, die zugleich als Zuleitung bei der Ladung dienen. (Siehe auch Kittler, I, 131 und 266.)

[1]) Monatsberichte der Berliner Academie, 1869, 1870 und 1873.

[2]) Bei der Weltausstellung Wien 1873 war eines der ersten Instrumente dieser Art von der Firma Siemens u. Halske der Oeffentlichkeit vorgeführt.

bei ſtarker Magnetiſirung die aperiodiſche Bewegung in der ihn mit geringem Spielraume eng umſchließenden Kupfermaſſe[1]), wobei überdies die Dämpfung von der Ablenkung unabhängig iſt. Das Siemens'ſche aperiodiſche Galvanometer iſt ſelbſtverſtändlich als Spiegelgalvanometer gebaut und gehört zu den hervorragendſten Hilfsmitteln der modernen Meßkunſt. Uebrigens iſt die aperiodiſche Einrichtung auch bei anderen Galvanometern vielfach in Anwendung gekommen.

98 **Nebenſchlüſſe.** Für jedes Galvanometer gibt es hinſichtlich der zuläſſigen Stromſtärke eine beſtimmte Grenze. Sollen ſtärkere Ströme damit gemeſſen werden, ſo bringt man an den Klemmen des Galvanometers, deſſen Widerſtand g ſein mag, einen Nebenſchluß (shunt) vom Widerſtande s an, der ſo gewählt iſt, daß nur ein beſtimmter Bruchtheil, z. B. $\frac{1}{n}$ des zu meſſenden Stromes durch das Galvanometer geht, wenn dieſes, mit dem beſagten Nebenſchluſſe verſehen, in die Leitung des zu meſſenden Stromes eingeſchaltet wird. Zu dieſem Zwecke muß, wie ſich leicht nachrechnen läßt,

$$s = \frac{g}{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 343)$$

gemacht werden und der Widerſtand des aus dem Galvanometer und dem damit parallel geſchalteten Nebenſchluſſe beſtehenden Syſtems iſt dann gleich dem $n$ten Theile des Galvanometerwiderſtandes. Man pflegt den Galvanometern Nebenſchlüſſe mit den Abſtufungen $s = \frac{g}{9}$ oder $\frac{g}{99}$ oder $\frac{g}{999}$ u. ſ. w. zur Auswahl beizugeben, mit denen erzielt werden kann, daß nur $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{100}$ oder $\frac{1}{1000}$ u. ſ. w. des zu meſſenden Stromes durch das Galvanometer geht.

99 **Indirecte Strommeſſung.** Die Meſſung ſtarker Ströme kann auch auf die Meſſung von Potentialdifferenzen zurückgeführt werden, und zwar nach folgendem Principe.

Man denke ſich in die Leitung des zu meſſenden ſtarken Stromes J (z. B. bei einer Beleuchtungsanlage) einen Leiter, deſſen Enden wir A und B nennen wollen, eingeſchaltet. Dieſer Leiter habe einen genau bekannten aber ſo kleinen Widerſtand W, daß er von dem zu meſſenden ſtarken Strome J nicht merklich erwärmt wird und alſo auch keine merkliche Widerſtandsänderung

[1]) In alter Vollkommenheit iſt der aperiodiſche Zuſtand nicht immer erreicht, z. B. ſo, daß der Galvanometermagnet erſt nach zwei bis drei ſehr raſch abnehmenden Schwingungen (von denen die beiden letzten nur mehr als ſchwache Zuckungen erſcheinen) in ſeine Gleichgewichtslage ſich einſtellt.

dadurch erfährt. Mißt man nun die Potentialdifferenz Δ zwischen A und B, so ist nach dem Ohm'schen Gesetze

$$J = \frac{\Delta}{W} \quad \ldots \quad \ldots \quad 344)$$

vorausgesetzt, daß durch die Spannungsmessung zwischen A und B keine Stromesänderung in W verursacht worden ist, was nahezu der Fall sein wird, wenn das zur Messung der Potentialdifferenz Δ verwendete Galvanometer (z. B. Siemens'sches Torsionsgalvanometer oder Voltmeter) einen im Vergleiche mit dem „Abzweigungswiderstande" W sehr großen Widerstand hat. Ist nämlich der Widerstand g des Torsionsgalvanometers sammt seinem Zusatzwiderstande z[1]) so groß, daß der zwischen A und B abgezweigte Strom $i = \frac{\Delta}{g + z}$ als verhältnißmäßig sehr klein außer Betracht gelassen werden kann, so kann auch die Strommessung nach Formel 344 als hinreichend genau angesehen werden. Im entgegengesetzten Falle hätte man zu erwägen, daß die ursprüngliche Potentialdifferenz Δ zwischen A und B durch das Anlegen des Spannungsgalvanometers vom Widerstande $G = g + z$ auf einen etwas kleineren Betrag Δ' herabgedrückt worden ist, weßhalb die zu messende Stromstärke durch den Quotienten $\frac{\Delta'}{W}$ $\left(\text{statt } \frac{\Delta}{W}\right)$ etwas zu klein angegeben würde, nämlich gleich einem Strome $J' = J - i = J \frac{G}{G + W}$, wie aus bekannten Gesetzen der Stromverzweigung leicht ersichtlich ist. Da nun offenbar $\frac{J}{J'} = \frac{\Delta}{\Delta'}$, so erhält man den mit Rücksicht auf den abgezweigten Strom i corrigirten Stromwerth in der Hauptleitung

$$J = \frac{\Delta'}{W} \cdot \frac{G + W}{G} \quad \ldots \quad \ldots \quad 345)$$

wobei also Δ' die am Torsionsgalvanometer wirklich gemessene Spannung bedeutet[2]).

Es kann natürlich auch jedes andere Galvanometer von großem Widerstande $g + z$ als Spannungsmesser dienen, wenn es geaicht ist, so, daß man den abgezweigten Strom i in Ampère damit messen kann, denn die nach dem Anlegen des Galvanometers bestehende Spannungsdifferenz Δ' zwischen A und B ist ja bestimmt durch die Gleichung $\Delta' = i\,(g + z)$.

Technische Galvanometer. Für technische Zwecke geeignete Galvano- 100
meter müssen manche Eigenschaften besitzen, auf die es bei Instrumenten, die

[1]) Oder der Widerstand g des Voltmetergewindes mit seinem Zusatzwiderstande z.

[2]) Näheres enthält meine Abhandlung: Ueber das Torsionsgalvanometer von Siemens u. Halske, Centralblatt für Electrotechnik, 1886, S. 579.

für wissenschaftliche Arbeiten bestimmt sind, nicht ankommt. Von einem Instrumente, das z. B. als Strom- oder Spannungsmesser am Schaltbrette eines Maschinenhauses dienen soll, muß man beanspruchen, daß es keiner magnetischen Orientirung bedarf, daß es durch benachbarte Eisenmassen, Magnete oder Stromleiter nicht gestört werde, daß es die unmittelbare Ablesung der zu messenden Größe sofort und ohne jede Rechnung gestatte, und daß es ohne alle umständliche Aufstellung überall angebracht werden könne.

Ganz vorzügliche technische Meßinstrumente sind die bereits besprochenen Hitzdrahtgalvanometer von Hartmann und Braun. Doch hat man schon viel früher auch electromagnetische Galvanometer, die den technischen Anforderungen sehr gut entsprechen, hergestellt, vornehmlich mit Benutzung des Principes: den Galvanometermagnet oder die ihn ersetzende Nadel aus weichem Eisen (Deprez, Carpentier) in einem so starken magnetischen Felde eines Stahlmagneten oder vom zu messenden Strome erregten Electromagneten (Kapp und Crompton) anzubringen, daß dessen Stärke (Kraftliniendichte) weder durch den Erdmagnetismus noch durch andere magnetische Fernewirkungen von außen her merklich verändert wird.

Bei allen diesen Instrumenten wird die Ablenkung der Nadel und des damit verbundenen Zeigers durch ein vom zu messenden Strome durchflossenes feststehendes Gewinde bewirkt.

Ein wesentlich anderes, sehr sinnreiches und in verschiedenen Formen verwerthetes Princip ist in dem Deprez-d'Arsonval'schen Galvanometer angewendet, wo ein in einem permanenten starken Magnetfelde beweglich angeordneter Leiter durch den ihn durchfließenden Strom bewegt wird.

Auch die magnetischen Kräfte, die im Hohlraume einer cylindrischen Magnetisirungsspirale auf bewegliche eiserne Körper ausgeübt werden, sind in mannichfacher Weise zur Herstellung von technischen Strom- und Spannungsmessern (Hummel, F. Kohlrausch, Drexler u. A.) verwendet worden.

Es würde zu weit führen, diese Constructionen eingehender zu besprechen und viele andere, die allenfalls noch bemerkenswerth wären, zu erwähnen.

101 **Ampèremeter, Voltmeter, Wattmeter.** Von den technischen Strom- und Spannungsmessern (Ampèremeter und Voltmeter) ist schon bei der Besprechung der Hitzdrahtinstrumente die Rede gewesen. Hier möge darüber noch folgendes bemerkt werden.

Das Ampèremeter ist bestimmt, in die Hauptleitung eingeschaltet zu werden, ohne eine merkliche Verminderung der zu messenden Stromstärke J zu verursachen. Das Ampèremeter muß also ein Instrument von verhältnißmäßig kleinem Widerstande r sein, und es wird dann auch nur einen geringen Effectverlust $= Jr$ verursachen. Da das Ampèremeter in der Regel zur

Messung stärkerer Ströme bestimmt ist, entspricht ihm eine verhältnißmäßig geringe Windungszahl, sehr oft nur eine einzige Windung, oder, wenn es ein Hitzdrahtinstrument ist, ein Nebenschluß.

Dagegen ist das Voltmeter bestimmt, in eine Abzweigung von zwei Punkten A und B der Hauptleitung, zur Messung der Potentialdifferenz Δ dieser Punkte, geschaltet zu werden, ohne daß diese Potentialdifferenz durch das Anlegen des Voltmeters merklich verändert werde. Um diese Bedingung zu erfüllen, ist, wie aus den Bemerkungen über die indirecte Strommessung (§. 99) hervorgeht, erforderlich, daß das Voltmeter, damit es eben nur einen sehr schwachen Zweigstrom i ableite, einen verhältnißmäßig sehr großen Widerstand $G = g + z$ habe, denn in diesem Falle wird

$$i = \frac{\Delta}{G} = \frac{\Delta}{g + z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 346)$$

verhältnißmäßig sehr klein sein[1]). Wegen der Kleinheit der das Voltmeter durchfließenden Ströme ist aber anderseits bei einem electromagnetischen Instrumente dieser Art eine verhältnißmäßig große Windungszahl erforderlich, um die zur Bewegung des Galvanometermagneten erforderliche Feldstärke und somit auch die nöthige Empfindlichkeit zu erzielen. Beim Hitzdraht-Voltmeter fehlt (im Gegensatze zum Hitzdraht-Ampèremeter) der Nebenschluß. Dabei ist die Scala des Voltmeters so eingerichtet, daß sie nicht den durch das Instrument gehenden Strom i, sondern das Product iG dieses Stromes mit dem Galvanometerwiderstande G, nämlich die Klemmenspannung $\Delta = iG$ des Instrumentes anzeigt. Bei entsprechender Kleinheit der Stromwerthe i werden auch die Effectverluste $i\Delta = i^2 G$ im Voltmeter unbeträchtlich klein sein.

Dabei ist zu bemerken, daß von dem Gesammtwiderstande $G = g + z$ des Instrumentes stets der weitaus größere Theil auf den Zusatzwiderstand z und nur ein kleiner Theil g auf den eigentlichen Galvanometerdraht (Multiplicatorgewinde oder Hitzdraht) kommt[2]).

Mißt man den einem Verbrauchsobjecte (z. B. einer Lampengruppe, oder einem zu ladenden Accumulator u. s. w.) zugeführten Strom J mit dem

---

[1]) Es wird hier vorausgesetzt, daß der Widerstand der die Klemmen des Voltmeters mit den Abzweigungspunkten A und B verbindenden Drähte so klein sei, daß sie keinen merklichen Spannungsverlust verursachen und daß demnach die Klemmenspannung $\Delta = i(g + z)$ am Instrumente auch als die zwischen den Abzweigungspunkten A und B bestehende Spannungsdifferenz gelten könne.

[2]) So betrug z. B. nach Kittler (I, 207) bei einem Hummel'schen Voltmeter für maximal 120 Volt mit 4200 Windungen Kupferdraht von 160 Ohm Widerstand der Zusatzwiderstand aus Nickelindraht 1230 Ohm. Hieraus ergäbe sich eine maximale Stromstärke $i = 0{,}086$ und ein Energieverlust von $0{,}086 \times 120 = 10{,}32$ Watt, wovon rund 1,9 Watt auf die Spule und 8,1 Watt auf den Zusatzwiderstand entfallen. Man findet übrigens bei Voltmetern für die gleiche Maximalbeanspruchung (120 Volt) auch noch viel größere Widerstände. (Kittler, I, 399.)

Ampèremeter und die Spannung Δ unter der das Verbrauchsobject den zugeführten Strom aufnimmt (also z. B. die Potentialdifferenz zwischen den Lichtleitungen, oder die Klemmenspannung des in Ladung stehenden Accumulators) mit dem Voltmeter, so stellt das Product $J\Delta$ (Voltampère oder Watt) die beim Betriebe des Verbrauchsobjectes aufgewendete Arbeitsstärke und das Zeitintegral derselben (§. 50, Formel 150) die innerhalb einer bestimmten Zeit vom Verbrauchsobjecte aufgenommene Arbeit (z. B. in Wattstunden ausgedrückt) vor [1]).

Es gibt aber auch Instrumente, die eine unmittelbare Messung des Productes $J\Delta$ (ohne Einzelmessung der Größen J und Δ) gestatten, und die man deßhalb auch Wattmeter oder Wattmesser genannt hat. Diese Instrumente beruhen auf dem schon bei der Besprechung des Electrodynamometers (§. 94) erwähnten Principe der Wechselwirkung zwischen einem feststehenden und einem beweglichen Stromleiter, jedoch in der Art, daß beim Wattmeter der feste Leiter der Arbeitsstrom J führt, während der bewegliche Leiter von einem der Potentialdifferenz Δ proportionalen Strome i durchflossen ist.

Beide Leiter sind als Drahtgewinde mit verticalen Windungsebenen in der Art angeordnet, daß das bewegliche Gewinde durch die Wechselwirkung der Ströme J und i eine Drehung um eine verticale Axe (Aufhängungsfaden) erfährt, die durch entgegengesetztes Drehen an einer spiralförmigen Torsionsfeder durch deren Spannung rückgängig gemacht werden kann, wie es hinsichtlich des Glockenmagneten des Torsionsgalvanometers und der beweglichen Drahtwindung des Electrodynamometers bereits angedeutet worden ist.

Der hierzu erforderliche Torsionswinkel φ muß dem Producte Ji der beiden vorgenannten Ströme proportional sein, da das von der Wechselwirkung dieser beiden Ströme auf die bewegliche Spule ausgeübte Drehungsmoment sowohl mit dem einen als auch mit dem anderen derselben proportional sein muß [2]). Bezeichnet man den Proportionalitätsfactor mit k, so erhält man demnach

$$\varphi = kJi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 347)$$

Bezeichnet man ferner mit g den Widerstand des beweglichen Gewindes, dann mit z den diesem Gewinde stets vorgeschalteten (inductionsfreien) Zusatzwiderstand [3]) und mit $G = g + z$ deren Summe, so ergibt sich die weitere

---

[1]) In der Formel 150 steht i für J und e für Δ.

[2]) Beim Electrodynamometer werden beide Gewinde von demselben Strome i durchflossen, wir hatten also dort den speciellen Fall $J = i$ und dementsprechend $\varphi = ki^2$ (Formel 330).

[3]) Den Wattmetern von Ganz u. Co. sind Widerstandskasten zum Stöpseln beigegeben, die eine Auswahl von Vorschaltwiderständen in passenden Abstufungen darbieten. Das von K. Zickler construirte und in einer 1895 erschienenen Broschüre beschriebene „Universal-Electrodynamometer“ ist als Ampèremeter, als Voltmeter und auch als Wattmeter brauchbar.

Folgerung $\varphi(g + z) = kJi(g + z) = kJ\Delta$, indem $\Delta = i(g + z)$ die Potentialdifferenz in den Punkten bedeutet, wo der Stromkreis des beweglichen Gewindes mit seinem Zusatzwiderstande angeschlossen ist, also z. B. die Potentialdifferenz an den Klemmen eines Verbrauchsobjectes (etwa eines Electromotors). Demnach ist $J\Delta = \frac{1}{k}(g + z)\varphi$ oder

$$J\Delta = CG\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 348)$$

wenn man $\frac{1}{k} = C$ und $g + z$ für G setzt.

Hat man also das (dickdrahtige) feststehende Gewinde, auch Hauptspule genannt, in die Hauptleitung, d. i. in die dem Verbrauchsobjecte den Arbeitsstrom J zuführende Leitung geschaltet, hingegen das (dünndrahtige) bewegliche Gewinde, auch Nebenspule genannt, sammt dem vorgeschalteten Widerstande als Zweigleitung an den Stellen (etwa Klemmen) angebracht, wo der Arbeitsstrom in das Verbrauchsobject (Lampengruppe, Accumulator oder Electromotor u. s. w.) eintritt und aus demselben wieder austritt, so erfährt man mit Hilfe des Wattmeters aus der Beobachtung des Torsionswinkels φ unmittelbar, d. h. ohne Einzelmessungen von J und Δ, die aufgewendete electrische Arbeitsstärke $J\Delta$ in Watt.

Bei einem Gleichstrombetriebe erhält man mit dem Wattmeter denselben Werth für $J\Delta$ wie mit Einzelmessungen, bei Wechselstrom aber nur dann, wenn das Verbrauchsobject „inductionsfrei" (z. B. aus Glühlampen bestehend, nicht aber magnetisirende Drahtspulen u. dergl. enthaltend) ist, wovon später die Rede sein wird[1]).

Tangentenbussole. Im Anschlusse an diese, einen allgemeinen Ueber- 102
blick gewährenden Erörterungen über Galvanometer möge noch ein Instrument dieser Art, weil es als absolutes Meßinstrument besonders bemerkenswerth ist, etwas eingehender besprochen werden, nämlich die von W. Weber eingeführte Tangentenbussole.

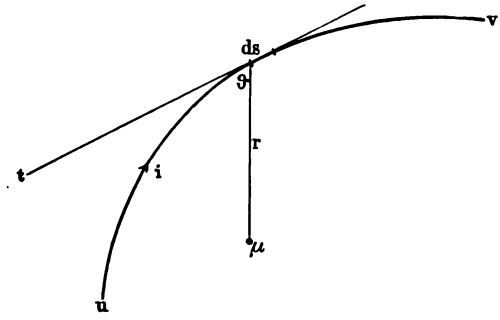
---

[1]) Hinsichtlich der Schaltung des Wattmeters wäre noch folgendes zu bemerken. Ist die Hauptspule so in die Hauptleitung geschaltet, daß sie (neben dem Verbrauchsobjecte) innerhalb der Abzweigungspunkte der Nebenspule liegt, dann enthält die in diesen Abzweigungspunkten vorhandene Potentialdifferenz (nebst der dem Verbrauchsobjecte entsprechenden) auch noch den Spannungsverlust δ in der Hauptspule, und die Angabe des Wattmeters fällt um den Betrag $J\delta$ zu groß aus, was bei starken Strömen zu vermeiden ist. Liegt aber die Hauptspule außerhalb der Abzweigungspunkte, so leitet sie einen Strom, der nebst dem Arbeitsstrome des Verbrauchsobjectes auch noch den in die Nebenspule sich abzweigenden Strom i enthält, und die Angabe des Wattmeters ist somit in diesem Falle um den Betrag $i\Delta$ zu groß, was man bei hohen Spannungen vermeiden wird. Durch ein einfaches Schema kann man sich diese Verhältnisse leicht übersichtlich machen.

Die Theorie dieses Instrumentes ergibt sich sehr einfach mit Hilfe des nachstehenden Biot-Savart'schen Gesetzes [1]).

Ein nach einer ebenen Curve uv (Fig 16) gebogener linearer Stromleiter (Draht), in dem ein Strom von der Intensität i nach absolutem, electromagnetischem Maße circulirt, übt auf einen in der Ebene des Stromleiters liegenden, mit der magnetischen Quantität μ begabten Punkt eine senkrecht zur Ebene des Stromleiters wirkende Kraft aus, die im C-G-S-System in Dynen ausgedrückt durch die Formel

Fig. 16.



$$p = i\mu \int \frac{ds \,.\, \sin\vartheta}{r^2} \qquad 349)$$

gegeben ist, wobei r den Abstand des magnetischen Punktes von einem Leiterelemente ds bedeutet und ϑ den Winkel, den r mit ds einschließt. Hat der Strom die durch den Pfeil angedeutete Richtung und ist der afficirte Punkt nördlich magnetisch, so hat die Kraft im Sinne unserer Figur die Richtung gegen die Zeichnungsebene [2]).

Denken wir uns, der Stromleiter, von dem uv einen Theil vorstellt, bilde eine geschlossene Curve und befinde sich in der Ebene des magnetischen Meridianes. Innerhalb des geschlossenen Stromleiters und in der Ebene desselben sei der Drehungspunkt einer sehr kleinen Magnetnadel, die wir uns so kurz denken, daß der Abstand eines ihrer Pole vom Drehungspunkte auch im Vergleiche mit dem kleinsten Abstande r von irgend einem Leiterelemente ds verschwindend klein sei [3]). Denken wir uns ferner in den Polen dieser Nadel die magnetischen Quantitäten $+\mu$ und $-\mu$ und nennen wir H die horizontale Intensität des Erdmagnetismus. Auf jeden Pol der Nadel wirkt dann senk-

---

[1]) Biot's Lehrbuch der Physik, übersetzt von Fechner, Bd. 4.

[2]) Denken wir uns ein einzelnes Leiterelement ds auf den magnetischen Punkt wirkend, so ist die Richtung der Kraft senkrecht auf der durch das Leiterelement ds und den afficirten Punkt μ gelegten Ebene und hat der Betrag

$$dp = i\mu \frac{ds \,.\, \sin\vartheta}{r^2} \qquad 350)$$

woraus Formel 349 hervorgeht.

[3]) Diese Voraussetzung der Rechnung läßt sich in Wirklichkeit nur mit einer gewissen Annäherung erreichen, die für die mehr oder weniger genaue Uebereinstimmung des Ergebnisses der Rechnung mit den Versuchen maßgebend ist. Die Nadellänge einer Weber'schen Tangentenbussole soll nicht mehr als etwa $^1/_{12}$ des Ringdurchmessers betragen.

recht zur Ebene des magnetiſchen Meridianes die Kraft $p = i\mu \int \frac{ds \,.\, \sin\vartheta}{r^2}$, oder, wenn wir das Integral kurz mit S bezeichnen, die Kraft $p = i\mu S$, und parallel zur Ebene des magnetiſchen Meridianes die Kraft $H\mu$. Die Reſultirende und alſo auch die Gleichgewichtslage der aus dem magnetiſchen Meridiane abgelenkten Nadel wird alſo mit der Ebene des magnetiſchen Meridianes einen Winkel ω bilden, deſſen Tangente $tg\,\omega = \frac{i\mu S}{H\mu} = \frac{iS}{H}$ iſt, woraus folgt:

$$i = \frac{H}{S}\, tg\,\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad 351)$$

Die beſchriebene Zuſammenſtellung eines ebenen Stromleiters mit einer kurzen Magnetnadel bildet alſo, wie immer der Stromleiter ſonſt geſtaltet ſein mag, eine ſogenannte Tangentenbuſſole. Es iſt jedoch vortheilhaft, dem Stromleiter eine Form und Anordnung zu geben, für die das Integral S möglichſt einfach und genau ermittelt werden kann. Dies iſt der Fall bei der Weber'ſchen Tangentenbuſſole mit einem kreisförmigen Stromleiter, in deſſen Mittelpunkte der Drehungspunkt der Nadel iſt. In dieſem Falle iſt

$$S = \int \frac{ds \,.\, \sin\vartheta}{r^2} = \frac{2\pi}{R},$$

wenn R der Radius des kreisförmigen Stromleiters iſt. Der ſogenannte Reductionsfactor $\frac{H}{S}$ iſt alſo bei der Weber'ſchen Tangentenbuſſole $= \frac{HR}{2\pi}$. Man erhält alſo mit dieſer Buſſole die Stromſtärken $J = 10\,i$ in Ampère nach der Formel

$$J = \frac{10}{2\pi} \cdot HR \,.\, tg\,\omega = 1{,}59\, HR \,.\, tg\,\omega \quad \ldots\ldots \quad 352)$$

Hat die Tangentenbuſſole mehrere Windungen von den Radien R_1, R_2, R_3 u. ſ. w. und ſetzt man $\sum \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots$, ſo gilt die Formel

$$J = \frac{10}{2\pi} \cdot \frac{H}{\sum \frac{1}{R}} \cdot tg\,\omega = 1{,}59\, \frac{H}{\sum \frac{1}{R}} \cdot tg\,\omega \quad \ldots \quad 353)$$

oder endlich, wenn ſämmtliche Windungen, n an der Zahl, gleiche Radien haben

$$J = \frac{10}{2\pi} \cdot \frac{HR}{n} \cdot tg\,\omega = 1{,}59\, \frac{HR}{n} \cdot tg\,\omega \quad \ldots\ldots \quad 354)$$

Eine Gaugain'sche Tangentenbussole, deren Windungen auf einer Kegelfläche liegen, die gegen den Drehungspunkt der Nadel dergestalt convergirt, daß dieser Drehungspunkt von der Ebene einer jeden Windung um die Hälfte ihres Radius absteht, gibt die Stromstärke in Ampère nach der Formel:

$$J = \left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} \cdot \frac{10}{2\pi} \cdot \frac{H}{\sum \frac{1}{R}} \cdot tg\,\omega = 2{,}224\,\frac{H}{\sum \frac{1}{R}} \cdot tg\,\omega \qquad 355)$$

Hat die Gaugain'sche Tangentenbussole einen Ring, der aus n Windungen von nahezu gleichen Radien besteht, und ist R deren Mittelwerth, so ist annähernd

$$J = 2{,}224\,\frac{HR}{n} \cdot tg\,\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 356)$$

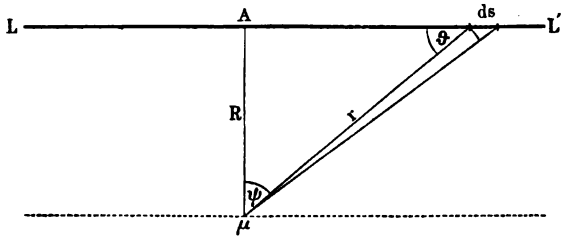
Man kann bei gegebenem H die Größen R und n so wählen, daß $2{,}224\,\frac{HR}{n} = 1$ wird. Dies ist z. B. für $H = 0{,}2$ und $n = 5$ der Fall, wenn $R = 11{,}24$ cm gemacht wird. Man hat dann ein Instrument, das an einem Beobachtungsorte, wo $H = 0{,}2$ ist, die Stromstärken unmittelbar als Tangenten der Ablenkungswinkel angibt. Nimmt man dicken Draht, so wird auch der Widerstand des Instrumentes klein sein, was in vielen Fällen erwünscht ist. Denken wir uns das Instrument etwa innerhalb der Grenzen zwischen 17° und 71° Ablenkung verwendet, so können wir damit Ströme von etwa 0,3 bis 3 Ampère, also im Umfange von 1 : 10 messen. Der Draht muß eine angemessene Stärke (im vorliegenden Falle etwa 2 mm) haben. Das Instrument gibt bei einem Strome von 1 Ampère 45° Ablenkung.

Versieht man aber das Instrument noch mit einer zweiten Wickelung, die aus 500 Windungen eines entsprechend dünneren Drahtes besteht, so wird bei gleicher Größe des mittleren Radius der Reductionsfactor für diese zweite, dünndrahtige, Wickelung 100 mal kleiner sein, als für die dickdrahtige, also $= {}^1{}_{100}$, d. h. ein Strom $= {}^1{}_{100}$ Ampère wird bei Anwendung der dünndrahtigen Wickelung 45° Ablenkung hervorbringen. Die Tangenten der Ablenkungswinkel bedeuten also in diesem Falle Hundertel Ampère. Sie können aber auch zugleich die am Instrumente wirksame Klemmenspannung in Volt bedeuten, wenn der Widerstand der 500 Windungen genau auf 100 Ohm abgeglichen ist, denn dann erzeugt 1 Volt, an den Klemmen des Instrumentes wirkend, einen Strom von ${}^1{}_{100}$ Ampère. Damit haben wir in den Grundzügen Princip und Einrichtung der J. Keßler'schen „Normaltangentenbussole" (ausgeführt von Czeija und Nißl in Wien) beschrieben. Eine Correctionsvorrichtung gestattet, das Instrument durch Verstellung des Ringes

gegenüber der Bussole verschiedenen Werthen der erdmagnetischen Horizontalintensität anzupassen [1]).

Ein bemerkenswerther specieller Fall, auf den wir das Biot-Savart'sche Gesetz anwenden wollen, ist folgender. In der Ebene des magnetischen Meridianes sei ein langer Draht horizontal ausgespannt und in der durch diesen Draht gelegten verticalen Ebene befinde sich, z. B. unterhalb des Drahtes in einem Abstande R, der Drehungspunkt einer sehr kurzen Magnetnadel, in deren Polen wir uns die magnetischen Quantitäten $+\mu$ und $-\mu$ concentrirt denken

Fig. 17.



wollen. Der Draht leite einen Strom von der Intensität i nach absolutem electromagnetischem Maße. Wir fassen zunächst die Wirkung eines Elementes ds des stromleitenden Drahtes auf einen der Pole μ ins Auge, dessen Abstand von ds wir mit r bezeichnen wollen (siehe Fig. 17), während der Abstand des Punktes μ vom Drahte R ist. Diese von ds auf μ ausgeübte Kraft ist nach Formel 357 $dp = i\mu \frac{ds \sin\vartheta}{r^2}$, wenn ϑ den Winkel zwischen r und ds bedeutet. Nennen wir den Winkel, den r mit R einschließt, ψ und den Gesichtswinkel, unter dem ds von μ aus gesehen erscheint, $d\psi$, dann ist $ds \sin\vartheta = r\,d\psi$, also $\frac{ds \sin\vartheta}{r^2} = \frac{d\psi}{r}$. Andererseits ist $r = \frac{R}{\cos\psi}$, folglich $dp = \frac{i\mu}{R} \cos\psi\, d\psi$. Dies gibt für einen unendlich langen Draht integrirt:

$$p = \frac{i\mu}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, d\psi = \frac{2\,i\mu}{R} \quad \ldots\ldots \quad 357\,^{2})$$

[1]) Näheres über dieses Instrument enthalten die diesbezüglichen Abhandlungen, z. B. Beschreibung der Normaltangentenbussole von Prof. J. Keßler. Centralbl. f. Electrotechnik, Bd. 8 (1886), S. 626.

[2]) Vergleicht man diese Wirkung mit der aus der Formel 349 ersichtlichen Wirkung eines kreisförmigen Stromleiters vom Radius R auf eine im Centrum befindliche magnetische Quantität μ, nämlich

$$p = \frac{2\pi i\mu}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 358)$$

so verhalten sich diese wie $1 : \pi$.

Diese Kraft ist senkrecht zu der durch den Draht und den Punkt μ gelegten Ebene gerichtet und wird also eine Ablenkung der Nadel aus der Ebene des magnetischen Meridianes um einen Winkel ω bewirken, dessen Tangente

$$tg\,\omega = \frac{2i\mu}{R} : H\mu = \frac{2i}{HR} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 359)$$

sein wird, wenn wir die parallel zur Ebene des magnetischen Meridianes auf das Theilchen μ wirkende Kraft der erdmagnetischen Horizontalintensität wieder mit $H\mu$ bezeichnen. Man könnte also auch einen solchen in der Ebene des magnetischen Meridianes horizontal ausgespannten Draht mit darunter befindlicher sehr kurzer Magnetnadel, wenn deren Abstand R vom Drahte nicht zu klein ist, als Tangentenbussole verwenden. Obgleich die Formeln 357 und 359 unter der Voraussetzung einer unendlichen Drahtlänge abgeleitet worden sind, so gelten sie doch auch annähernd für endliche Längen, wenn diese so groß sind, daß die entfernteren Elemente ids nicht mehr merklich auf die Nadel einwirken.

103 **Anwachsen und Abfallen eines electrischen Stromes. Selbstinduction.** Wenn an den Enden eines Leiters (z. B. Drahtes) vom Widerstande R eine Potentialdifferenz E (z. B. durch Anschluß an die Pole einer Stromquelle) hervorgerufen wird, so entsteht in dem Leiter eine Electricitätsbewegung, die man einen electrischen Strom nennt. Dieser hat aber nicht sofort die den gegebenen Größen E und R nach dem Ohm'schen Gesetze entsprechende Stärke $J = \frac{E}{R}$, und zwar aus folgendem Grunde.

Der im Leiter entstehende Strom erzeugt zugleich ein magnetisches Feld, entsprechend einer Schar von Kraftlinien, die, von einer in der Richtung des Stromes schwimmenden Figur angesehen, im Sinne von rechts nach links (also im Sinne der Drehung eines in der Stromrichtung fortschreitenden Korkziehers) in geschlossenen Curven (bei einfachster Anordnung in Kreisen) um den Leiter herum verlaufen. Die Anzahl z dieser Kraftlinien wächst mit der Stärke des entstehenden Stromes, dessen Intensität zur Zeit t (vom Augenblicke des Anschlusses des Leiters an die Stromquelle an gerechnet) mit i bezeichnet werden soll. Dieses Anwachsen der Kraftlinienzahl z bewirkt aber nach den bekannten Gesetzen der magnetoelectrischen Induction in dem Leiter das Auftreten einer electromotorischen Kraft, deren Größe η durch die Gleichung

$$\eta = -\frac{dz}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 360)$$

bestimmt ist, wofür man unter der Voraussetzung der Proportionalität zwischen z und i, also unter der Annahme

$$z = Li \quad \ldots \ldots \ldots \quad 361)$$

auch schreiben kann

$$\eta = -L\frac{di}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 362)$$

Dabei bedeutet das negative Vorzeichen, daß die durch eine Stromzunahme di hervorgerufene electromotorische Kraft η dem anwachsenden Strome entgegenwirkt, daß dagegen eine Stromabnahme eine mit dem abnehmenden Strome übereinstimmend wirkende electromotorische Kraft erzeugt.

Man nennt diese inducirende Rückwirkung eines veränderlichen Stromes auf sich selbst: Selbstinduction und den durch die Gleichungen 361 und 362 definirten Proportionalitätsfactor L den Coëfficienten der Selbstinduction[1]).

Die Potentialdifferenz E an den Enden des betrachteten Leiters oder Apparates, die sogenannte Klemmenspannung [auch treibende electromotorische Kraft genannt[2])] hat in jedem Augenblicke die electromotorische Kraft η der Selbstinduction zu überwinden und überdies den dem Strome i beim Widerstande R entsprechenden Spannungsverlust

$$e = iR \quad \ldots \ldots \ldots \quad 363)$$

zu bestreiten. Diese Erwägung führt zu der den Gleichungen 282 und 316 analogen Gleichung $E = e + \eta$ oder

$$E = iR + L\frac{di}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 364)$$

Dividirt man diese Gleichung beiderseits durch R und setzt $\frac{E}{R} = J$ und $\frac{L}{R} = \vartheta$, so erhält man nach der Trennung der Veränderlichen i und t die Gleichung $\frac{dt}{\vartheta} = \frac{di}{J - i}$ und hieraus durch Integration

$$-\frac{t}{\vartheta} = log\ nat\ A(J - i),$$

wobei A eine noch zu bestimmende Integrationsconstante bedeutet. Da für $t = 0$ auch $i = 0$ sein muß, also $0 = log\ nat\ AJ$ und somit $AJ = 1$, ergibt sich $A = \frac{1}{J}$.

---

[1]) Der electromotorischen Kraft η der Selbstinduction entspricht beim Widerstande R im betrachteten Leiter ein Strom $\frac{\eta}{R}$, den man Extrastrom genannt hat.

[2]) Im Englischen ist für „Klemmenspannung" (eine Bezeichnung, die von Uppenborn herrührt) der Ausdruck impressed electromotive force gebräuchlich.

Demnach ist $-\frac{t}{\vartheta} = log\ nat\ \frac{J-i}{J}$ oder $\varepsilon^{-\frac{t}{\vartheta}} = 1 - \frac{i}{J}$, somit $i = J\left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{\vartheta}}\right)$, also

$$i = J\left(1 - \varepsilon^{-\frac{Rt}{L}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 365)$$

Dabei ist J der (unter Voraussetzung einer constanten Potentialdifferenz E) sich ergebende Endwerth des anwachsenden Stromes i.

Schreibt man die Gleichung 365 in der Form $i = \frac{E\left(1 - \varepsilon^{-\frac{Rt}{L}}\right)}{R}$, so erscheint die augenblickliche Stärke i des anwachsenden Stromes als Quotient der constanten Potentialdifferenz E durch einen scheinbaren Widerstand $R' > R$, nämlich $R' = \frac{R}{1 - \varepsilon^{-\frac{Rt}{L}}}$, dessen Werth von ∞ (bei $t = 0$) bis auf R (für $t = \infty$) abnimmt, während der Strom i von 0 bis J anwächst.

Der Ausdruck 365 läßt somit erkennen, daß theoretisch eine unendlich lange Zeit erforderlich erscheint, damit der anwachsende Strom i seinen Endwerth J erreiche; das Anwachsen des Stromes i geschieht aber so rasch, daß practisch ein diesem Endwerthe sehr nahe kommender Werth schon nach sehr kurzer Zeit erreicht wird. Diese Zeit fällt desto größer aus, je größer der Coëfficient L der Selbstinduction und je kleiner der Widerstand R ist. Man hat deßhalb das Verhältniß $\frac{L}{R} = \vartheta$ auch die Zeitconstante des anwachsenden Stromes genannt.

Für den Fall des plötzlichen Verschwindens (Ausschaltung) der Potentialdifferenz E, also für $E = 0$ ergibt sich aus der Gleichung 364 $-\frac{dt}{\vartheta} = \frac{di}{i}$ also durch Integration $-\frac{t}{\vartheta} = log\ nat\ Ci$, wobei t die vom Zeitpunkte des Verschwindens der Potentialdifferenz E an gemessene Zeit und C wieder eine Integrationsconstante bedeutet. Für $t = 0$ ist also noch $i = J$, somit $0 = log\ nat\ CJ$, also $CJ = 1$ und $C = \frac{1}{J}$. Es ist demnach

$$-\frac{t}{\vartheta} = log\ nat\ \frac{i}{J} \quad \text{und} \quad \varepsilon^{-\frac{t}{\vartheta}} = \frac{i}{J}$$

oder

$$i = J\,\varepsilon^{-\frac{Rt}{L}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 366)$$

Theoretisch erscheint also auch zum völligen Nullwerden des abfallenden Stromes i eine unendlich lange Zeit ($t = \infty$) erforderlich, doch erfolgt dieser Abfall so rasch, daß practisch schon nach sehr kurzer Zeit ein verschwindend kleiner Stromwerth i erreicht ist.

Mit dem Abfallen des Stromes i nimmt auch das magnetische Feld ab und dieser Vorgang bewirkt das Auftreten einer mit dem abnehmenden Strome i gleichgerichteten electromotorischen Kraft, die also das Abfallen des Stromes verzögert und das plötzliche Nullwerden desselben bei Ausschaltung der electromotorischen Kraft E ebenso verhindert wie bei deren Einschaltung die gleichzeitige Erreichung des vollen Stromwerthes J.

Die graphische Darstellung gibt für den anwachsenden Strom (Formel 365), wenn die t als Abscissen und die i als Ordinaten aufgetragen werden, eine aus dem Coordinaten-Ursprunge concav gegen die Abscissenaxe ansteigende und gegen eine zur Abscissenaxe im Abstande J parallele Asymptote convergirende Curve. Die Curve des abfallenden Stromes hingegen beginnt in einem im Abstande J über dem Coordinaten-Ursprunge gelegenen Punkte der Ordinatenaxe und fällt, gegen die Abscissenaxe convex, sehr rasch gegen diese ab, indem sie zuletzt asymptotisch gegen dieselbe convergirt.

Der anwachsende Strom wird für $t = \frac{L}{R}$ gleich $J(1 - \varepsilon^{-1})$, also $i = 0{,}6321\, J$, der abfallende Strom wird für

$$t = \frac{L}{R} \text{ gleich } J\varepsilon^{-1} = 0{,}3679\, J.$$

Bei der Entwickelung des vom anwachsenden Strome erzeugten magnetischen Feldes wird eine Arbeit aufgewendet, die in einem Zeitelemente dt den Betrag $d\lambda = i\eta\, dt$ ausmacht, wobei i den augenblicklichen Werth des anwachsenden Stromes und $\eta = L\frac{di}{dt}$ den augenblicklichen Werth der electromotorischen Kraft der Selbstinduction (Formel 362) bedeutet. Nach Einsetzung dieses Werthes in den Ausdruck für $d\lambda$ und unter der Voraussetzung, daß der Coëfficient L der Selbstinduction constant ist, wovon im nächsten Paragraphen die Rede sein wird, gibt die Integration

$$\lambda = L\int_0^J i\, di = \frac{LJ^2}{2} \quad \ldots\ldots \quad 367)$$

für die bei der Herstellung des magnetischen Feldes aufgewendete und als potentielle Energie in diesem aufgespeicherte Arbeit. Beim Verschwinden des magnetischen Feldes (z. B. durch Stromunterbrechung), wobei eine mit dem verschwindenden Strome gleichgerichtete electromotorische Kraft (nämlich die des

in der Regel mit Funkenbildung verbundenen „Oeffnungsextrastromes") auftritt, wird diese Arbeit λ wieder gewonnen.

Der Ausdruck 367 für diese Arbeit ist übereinstimmend mit dem Ausdrucke (Formel 51) für die lebendige Kraft einer mit der Geschwindigkeit J begabten Masse L und der Coëfficient der Selbstinduction erscheint insofern als ein Analogon der Masse. In der That widersetzt sich die Selbstinduction, wie wir gesehen haben, sowohl dem Anwachsen als auch dem Abfallen eines Stromes, sowie die Trägheit der Masse sowohl einer Beschleunigung als auch einer Verzögerung widersteht.

104 **Coëfficient der Selbstinduction.** Aus der Gleichung 362 läßt sich eine Definition dieses mit L bezeichneten Coëfficienten ableiten, die dahin lautet, daß L jene electromotorische Kraft der Selbstinduction bedeutet, die eintritt, wenn die Aenderungsgeschwindigkeit $\left(\frac{di}{dt}\right)$ des Stromes einer Stromeinheit pro Zeiteinheit entspricht. Die absolute electromagnetische Einheit der Selbstinductionscoëfficienten würde also einem Leiter zukommen, der so gestaltet und bemessen ist, daß darin eine Stromesänderung vom Betrage der absoluten Stromeinheit (10 Ampère) pro Secunde eine electromotorische Kraft der Selbstinduction vom Betrage einer absoluten Spannungseinheit (10^{-8} Volt) hervorruft.

Dieser Einheit entspricht im Sinne der Formel 362 der Ausdruck

$$(L) = \frac{C^{3/2} G^{1/2} S^{-2} \times S}{C^{1/2} G^{1/2} S^{-1}} = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 368)$$

Außerdem ist noch eine practische Einheit für Selbstinductions-Coëfficienten gebräuchlich, die man mit dem Namen Henry bezeichnet hat. Diese practische Einheit würde einem Leiter von solcher Gestalt und Abmessung zukommen, daß darin eine Stromesänderung von einem Ampère pro Secunde eine electromotorische Kraft der Selbstinduction von einem Volt hervorbringt. Die practische Einheit ist demnach 10^9 mal größer als die absolute, entsprechend dem Ausdrucke

$$(L) = \frac{10^8 C^{3/2} G^{1/2} S^{-2} \times S}{10^{-1} C^{1/2} G^{1/2} S^{-1}} = 10^9 C \quad . \quad . \quad 369)$$

Da 10^9 C die Länge eines Erdmeridian-Quadranten vorstellt, wird diese Einheit auch häufig mit „Erdquadrant" bezeichnet.

Das aus den Formeln 368 und 369 ersichtliche Verhältniß beider Einheiten ergibt sich auch aus der im §. 11 für die Bildung der practischen Einheiten gegebenen allgemeinen Regel, wenn man die Dimension des Selbstinductions-Coëfficienten berücksichtigt. Für diese ergibt sich aus der Formel 362, wie leicht ersichtlich,

$$(L) = \frac{l^{3/2} m^{1/2} t^{-2} \times t}{l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}} = l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 370)$$

Demnach ergibt sich für die Einheiten der Selbstinductions-Coëfficienten im C-G-S-System

$$\text{Absolute Einheit} = 1\ [\text{C}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 371)$$

$$\text{Practische Einheit oder Henry} = 10^9\ [\text{C}] \quad . \quad . \quad 372)$$

Man sagt also ein Selbstinductions-Coëfficient betrage L Centimeter oder L Erdquadranten, je nachdem man die eine oder die andere der beiden vorgenannten Einheiten zu Grunde gelegt hat[1]).

Schreibt man die Gleichung 369 in der Form

$$(L) = S \cdot \frac{10^8\, \text{C}^{3/2}\, \text{G}^{1/2}\, \text{S}^{-2}}{10^{-1}\, \text{C}^{1/2}\, \text{G}^{1/2}\, \text{S}^{-1}} = S \,.\, 10^9\, \text{C}\, \text{S}^{-1},$$

so erhält man das Product des Symboles einer Secunde und jenes eines Ohm (Formel 122). Man hat deßhalb die unter dem Namen Henry bekannte practische Einheit auch ein Secohm genannt.

Die in der Formel 361 ausgedrückte Definition des Selbstinductions-Coëfficienten läßt ferner erkennen, daß dieser Coëfficient L proportional sein muß mit der magnetischen Permeabilität der Materie, in der die Kraftlinien des vom betrachteten Strome erzeugten magnetischen Feldes verlaufen. Ist also die Umgebung des Stromleiters von constanter Permeabilität, so ist der Selbstinductions-Coëfficient gleichfalls eine Constante, wie es z. B. bei der in der Formel 367 ausgeführten Integration vorausgesetzt worden ist.

Nach den im vorigen Paragraphen zur Formel 367 gegebenen Erläuterungen erscheint der Selbstinductions-Coëfficient auch als der doppelte Werth der potentiellen Energie des der Stromeinheit entsprechenden magnetischen Feldes des betrachteten Leiters, denn die Formel 367 gibt für $J = 1$ den Werth

---

[1]) Die Anwendung der absoluten Maßsysteme bringt manchmal Ausdrucksweisen mit sich, die nicht ganz klar sein mögen, indem man sich z. B. nicht wohl vorstellen kann, wie ein Selbstinductions-Coëfficient nach Centimetern oder nach Erdquadranten gemessen werden soll. In der That geschieht dies aber auch gar nicht, ebensowenig wie z. B. Widerstandsmessungen nach Geschwindigkeiten von einem Centimeter oder Erdquadranten pro Secunde, obgleich man durch die Dimensionsausdrücke für Widerstandseinheiten $C S^{-1}$ und $10^9\, C S^{-1}$ zu dieser Ausdrucksweise ebenso berechtigt wäre, wie zu der bei dem Selbstinductions-Coëfficienten gebräuchlichen. Diese letztere soll eben nichts Anderes sagen, als daß man für den Selbstinductions-Coëfficienten jene Einheiten des electromagnetischen Systems gewählt hat, die sich ergeben, je nachdem man ein Centimeter (C) oder den Erdquadranten ($Q = 10^9\, C$) als Längeneinheit angenommen hat. Im letzteren Falle würde man nämlich erhalten

$$(L) = S \cdot \frac{Q^{3/2}\, G^{1/2}\, S^{-2}}{Q^{1/2}\, G^{1/2}\, S^{-3}} = Q = \text{Erdquadrant.}$$

$L = 2\lambda$. In Uebereinstimmung damit kann man nach einer von Stefan[1]) gegebenen Definition auch sagen, der Selbstinductions-Coëfficient sei gleichbedeutend mit dem doppelten electrodynamischen Potential der entsprechenden Stromleitung auf sich selbst, wenn diese von der electromagnetischen Stromeinheit durchflossen wird.

105 **Berechnung der Selbstinductions-Coëfficienten.** Diese ist nur in den einfachsten Fällen, z. B. für gleichförmig gewickelte cylindrische Drahtrollen mit befriedigender Annäherung practisch ausführbar.

Wir betrachten beispielsweise zunächst die aus einer einzigen[2]) Drahtlage von m Windungen bestehende Bewickelung eines Ringmagneten, deren längs der Mittellinie gemessene Länge $= l$ und deren innere Querschnittsfläche (Querschnitt des von der Drahtspirale umschlossenen Hohlraumes senkrecht zur Mittellinie) $= q$ sein soll, oder eine verhältnißmäßig lange, aus einer einzigen Drahtlage von m Windungen bestehende cylindrische Drahtspirale von der Länge l und vom inneren Querschnitte q. — Für Drahtrollen dieser Art findet man die Feldstärke H (Kraftlinienzahl pro Flächeneinheit) im Hohlraume nach Formel 186 gegeben durch den Ausdruck $H = \frac{4\pi m i}{l}$, wenn i die in der Drahtrolle vorhandene Stromstärke in absolutem Maße bedeutet; folglich die Gesammtzahl Z_0 der Kraftlinien im Hohlraume gegeben durch

$$qH = \frac{4\pi m q i}{l} = Z_0.$$

Denkt man sich nun i als Stromänderung in der Zeiteinheit, so bedeutet Z_0 die Aenderung der Kraftlinienzahl in der Zeiteinheit, folglich nach Formel 360 auch den Zahlenwerth der in jeder Windung der Drahtrolle inducirten electromotorischen Kraft der Selbstinduction. Diese hat demnach für die ganze aus m Windungen bestehende Drahtrolle den Werth $mZ_0 = \frac{4\pi m^2 q i}{l}$. Da dies immer noch in der Voraussetzung gilt, daß i als Stromänderung in der Zeiteinheit gedacht ist, so erscheint im Sinne der Formel 362 der Ausdruck $\frac{4\pi m^2 q}{l}$ als Werth des Coëfficienten der Selbstinduction der betrachteten Drahtrolle von m Windungen. Um dies anzudeuten, wählen wir die Bezeichnung $L_{(m)}$ und schreiben

---

[1]) Ueber die Berechnung der Inductions-Coëfficienten von Drahtrollen. Sitzber. der Wiener Academie, Bd. 88 (1883), S. 1201.

[2]) Eine Formel für den Coëfficienten der Selbstinduction von Spulen mit mehreren Drahtlagen folgt später unter 391.

$$L_{(m)} = \frac{4\pi m^2 q}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 373)$$

Dieser Ausdruck kann[1]) vereinfacht werden, indem man die Kreisfläche $q = \pi r^2$ einsetzt und die aufgewickelte Drahtlänge der Spule $m \times 2\pi r = S$, wobei r den Radius einer Windung bedeutet[2]). Man erhält dann

$$L_{(m)} = \frac{S^2}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 374)$$

Ist der Hohlraum der Spule mit einem Eisenkern ausgefüllt und bedeutet μ die magnetische Permeabilität der Eisensorte bei dem gerade vorhandenen, der magnetisirenden Stromstärke i entsprechenden Sättigungsgrade, so ist der Coëfficient der Selbstinduction nicht mehr constant (wie für die mit Luft von der Permeabilität $\mu = 1$ ausgefüllte Spule), sondern mit der Permeabilität μ proportional veränderlich, und man hätte demnach allgemeiner

$$L_{(m)} = \frac{4\pi m^2 \mu q}{l} = \frac{\mu S^2}{l} \quad \ldots\ldots \quad 375)$$

als augenblicklichen Werth des Selbstinductions-Coëfficienten anzusehen.

Mit Rücksicht auf die dabei in Betracht kommenden hohen Zahlenwerthe von μ ist einleuchtend, daß die Einführung von Eisenmassen in den Hohlraum einer Drahtspule sehr bedeutende Verstärkungen der Selbstinduction bewirken muß.

Dementsprechend wird auch die beim Anwachsen und Abfallen eines Stromes nach den Darlegungen des §. 103 in Betracht kommende Zeitconstante bedeutende Aenderungen erfahren, in dem Sinne, daß die Zeiten, binnen denen ein eine Drahtspule durchfließender Strom bis zu seiner vollen Stärke anwächst und von dieser wieder bis auf Null abfällt, bedeutend größer sind, wenn man die Spule mit einem Eisenkern versehen hat, als wenn dies nicht der Fall ist[3]).

Wir haben bisher nur den Fall einer verhältnißmäßig langen und aus einer einzigen Drahtlage bestehenden cylindrischen Magnetisirungsspirale behandelt. Weniger einfach gestaltet sich die Berechnung des Selbstinductions-Coëfficienten in anderen practisch wichtigen Fällen, z. B. bei verhältnißmäßig kurzen und weiten, aus mehreren Lagen bestehenden cylindrischen Drahtrollen.

Für den [auch von Maxwell[4]) behandelten] Fall, daß die Quer-

[1]) Vergl. Uppenborn, Kalender 1902, II, 173.

[2]) Je dünner der Draht einer Windung angenommen wird, desto genauer wird πr^2 den Querschnitt q des inneren Hohlraumes der Drahtspule darstellen.

[3]) Beispielsweise will ich einen hierher gehörigen Versuch mit einem großen Electromagneten anführen, bei dem ich mit Hilfe einer optischen Vorrichtung (Drehung der Polarisationsebene) beobachtet habe, daß die Zeit vom Augenblicke des Stromschlusses bis zur Erreichung des stationären Endwerthes der Stromstärke nicht weniger als eine ganze Secunde betrug.

[4]) Auf die Maxwell'sche Formel soll hier mit Rücksicht auf die in der citirten Abhandlung Stefan's enthaltenen kritischen Bemerkungen nicht eingegangen werden.

dimensionen des Rollenringes klein sind gegen den mittleren Durchmesser desselben, hat Stefan den Werth P des Selbstinductions-Coëfficienten in der nachstehenden übersichtlichen Formel ausgedrückt:

$$P = 4\pi a m^2 \left[\left(1 + \frac{3b^2 + c^2}{96 a^2} \right) lgn \frac{8a}{\sqrt{b^2 + c^2}} - y_1 + \frac{b^2}{16 a^2} y_2 \right] \quad . \quad 376)$$

Dabei bedeutet a den mittleren Radius der Rolle, m die Anzahl ihrer Drahtwindungen, ferner b die Breite und c die Höhe des Wickelungsraumes, nämlich b die zur Axe parallele und c die zur Axe senkrechte Seite des als rechteckig vorausgesetzten Ringquerschnittes. Die Größen y_1 und y_2 sind Functionen des Verhältnisses $x = \frac{c}{b}$, deren Werthe aus Tabellen, die Stefan berechnet hat[1]), entnommen werden können.

Wenn es sich nur um eine erste Annäherung (Schätzung) handelt, leistet eine von H. F. Weber angegebene sehr einfache Formel[2]) gute Dienste.

Bezeichnet man auch hier mit a den mittleren Radius, also mit $u = 2\pi a$ die mittlere Drahtlänge (den mittleren Umfang) einer Windung und mit m die Anzahl der Windungen, so kann man für kurze Rollen annähernd

$$L_{(m)} \doteq 4 m^2 u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 377)$$

setzen, wobei zu bemerken ist, daß der Coëfficient k im allgemeinen Ausdrucke $L_{(m)} \doteq k m^2 u$ mit zunehmender Länge der Rollen abnimmt[3]).

Man könnte auch die in der Formel 374 mit S bezeichnete Gesammtlänge des aufgewickelten Drahtes in die Formel 377 einführen, indem man $mu = S$ setzt, und erhielte dann den noch einfacheren Ausdruck

$$L_{(m)} \doteq 4 m S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 378)$$

Schließlich möge noch eine von Uppenborn[4]) (nach Perry) mitgetheilte Formel hier angeführt werden. Sie lautet mit Einführung unserer Bezeichnungen

$$L_{(m)} = \frac{m^2 a^2}{0{,}01844\, a + 0{,}035\, b + 0{,}031\, c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 379)$$

und ist auf kurze cylindrische Spulen anwendbar.

---

[1]) S. 1206 und 1208 der bereits citirten Abhandlung über die Berechnung der Inductions-Coëfficienten von Drahtrollen. Daraus ist ersichtlich, daß innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ die Werthe von y_1 von 0,5 bis 0,84834 und die Werthe von y_2 von 0,1250 bis 0,8162 variiren.

[2]) Ich verdanke die Kenntniß dieser (meines Wissens bisher nicht publicirten) Formel einer gefälligen mündlichen Mittheilung des Herrn Professors H. F. Weber in Zürich.

[3]) Hier ist unter der Länge der Drahtrolle die in diesem Paragraphen (nach Maxwell und Stefan) mit b bezeichnete Länge der der Axe parallelen Querschnittsseite zu verstehen. Für kleine b ist $k \doteq 4$ angenommen.

[4]) Kalender 1902, II, 173.

Die in diesem Paragraphen angeführten Formeln für Selbstinductions-Coëfficienten geben deren Werthe in absoluten Einheiten (C); will man die Werthe in practischen Einheiten, d. i. in Erdquadranten oder Henry (10^9 C) ausgedrückt erhalten, so müssen die von den vorstehenden Formeln (373 bis 379) gelieferten Werthe durch 10^9 dividirt werden (§. 104).

Beispiel. Gegeben ist ein aus ungefähr $m = 560$ Windungen eines 1 mm dicken, wohlisolirten Kupferdrahtes bestehender Ring mit den rechteckigen Querschnittsdimensionen $b = 3{,}4$ cm und $c = 3{,}15$ cm und dem mittleren Durchmesser $2a = 18{,}85$ cm einer Windung. Für diese Drahtrolle hat ein Versuch[1]) den Betrag des Selbstinductions-Coëfficienten $= 0{,}0776$ Henry ergeben. Die Rechnung nach der Stefan'schen Formel (376) gibt 0,084, die Rechnung nach der H. F. Weber'schen Formel (377) gibt 0,074 und jene nach Perry (379) den noch etwas kleineren Werth[2]) 0,071 Henry.

Für den Coëfficienten der Selbstinduction eines einfachen Drahtkreises vom Radius R gilt, wenn die Drahtdicke mit d bezeichnet wird, nach Bláthy[3]) die Formel

$$L = 4\pi R\left[0{,}57944 + lgn\frac{2R}{d} - \frac{d}{R} - \frac{d^2}{96R^2} - \frac{d^3}{384R^3} - \cdots\right] \cdot \cdot \quad 380)$$

Bei einem geraden Drahte von der Dicke d und der Länge l ist, wenn μ die magnetische Permeabilität des Materiales bedeutet,

$$L = 2l\left[lgn\frac{4l}{d} - 1 + \frac{\mu}{4}\right] \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 381)$$

wobei man also z. B. für einen Kupferdraht $\mu = 1$ zu setzen hätte, wodurch $-1 + \frac{\mu}{4}$ in $-0{,}75$ übergeht[4]).

Die Besprechung der Methoden zur Messung der Selbstinductions-Coëfficienten gehören nicht in das Programm dieser Schrift, doch werden später (§. 111)[5]) Beziehungen zur Sprache kommen, die solchen Messungen zu Grunde liegen.

---

[1]) Ausgeführt bei den practischen Uebungen im electrotechnischen Institute der technischen Hochschule in Wien.

[2]) Bei der Vergleichung dieser Rechnungsergebnisse muß man erwägen, daß die Windungszahl m der besagten Drahtrolle nicht genau bekannt ist. Die Windungen sind bei der Anfertigung der Rolle nicht gezählt worden, sondern wurden erst nachträglich aus dem Ohm'schen Widerstande, dem Gewichte und den Abmessungen der Rolle und des Drahtes nach Formeln und Angaben von Du Moncel, Uppenborn, F. A. Hesse u. A. annähernd berechnet.

[3]) Zsakula, Gleichstrommessungen, S. 271.

[4]) Vergl. Kittler, I, S. 105.

[5]) Das Beispiel 1 daselbst enthält eine aus Versuchen abgeleitete Berechnung eines Selbstinductions-Coëfficienten.

106 **Coëfficient der gegenseitigen Induction.** Wir denken uns zwei benachbarte Leiter I und II. Die Stromstärke i im Leiter I ändere sich mit der Geschwindigkeit $\frac{di}{dt}$, dann kann die im benachbarten Leiter II dadurch inducirte electromotorische Kraft η' ausgedrückt werden durch die Gleichung

$$\eta' = M_{1,2} \times -\frac{di}{dt} = -M_{1,2}\frac{di}{dt} \quad \ldots \quad 382)$$

wobei $M_{1,2}$ von der Gestalt, den Abmessungen und der gegenseitigen Lage der Leiter I und II — wir wollen kurz sagen: von der Configuration des Leitersystemes — abhängt und der Inductions-Coëfficient des Leiters I auf den Leiter II genannt wird.

Aendert sich aber der Strom i' im Leiter II mit der Geschwindigkeit $\frac{di'}{dt}$, so kann die dadurch im Leiter I inducirte electromotorische Kraft η ausgedrückt werden durch die Gleichung

$$\eta = -M_{2,1}\frac{di'}{dt} \quad \ldots \quad 383)$$

wobei $M_{2,1}$ der Inductions-Coëfficient des Leiters II auf den Leiter I genannt wird und, wie leicht einzusehen ist,

$$M_{1,2} = M_{2,1} \quad \ldots \quad 384)$$

sein muß, weßhalb die Stellenzeiger auch weggelassen werden können, indem man den hiermit definirten Coëfficienten der gegenseitigen Induction einfach mit M bezeichnet.

Die Dimension dieses Coëfficienten wird, wie aus der Vergleichung der Ausdrücke 382 und 383 mit 362 hervorgeht, so wie die Dimension des Selbstinductions-Coëfficienten (Formel 370) durch das Längensymbol, nämlich

$$(M) = l \quad \ldots \quad 385)$$

dargestellt.

Demnach ergeben sich auch für den Coëfficienten der gegenseitigen Induction dieselben (im §. 104 bereits besprochenen) Einheiten wie für den Coëfficienten der Selbstinduction, nämlich das Centimeter beim Gebrauche der absoluten und der Erdquadrant (Henry) beim Gebrauche der practischen Einheiten des C-G-S-Systemes.

Aus den Darlegungen zu den Formeln 382 und 383 und mit Berücksichtigung des Sinnes der Formel 361 geht übrigens hervor, daß Mi die Zahl der vom Leiter I ausgehenden und den Leiter II treffenden Kraftlinien vorstellt, hingegen Mi' die Zahl der Kraftlinien, die vom Leiter II ausgehen und den Leiter I treffen. Im ersten Falle nennt man den Leiter I wohl auch den inducirenden oder primären Leiter und den Leiter II den inducirten

oder secundären.. Im zweiten Falle hingegen wäre der Leiter II als der primäre (inducirende) und I als der secundäre (inducirte) anzusehen.

Bemerkenswerth wäre ferner die Analogie der Ausdrücke Mii' und $\frac{Li^2}{2}$ (Formel 367) und der in der Electrostatik in Betracht kommenden Ausdrücke des Potentiales zweier Electricitätsmengen aufeinander und des Potentiales einer Electricitätsmenge auf sich selbst [1]), doch würde uns eine eingehende Erörterung hierüber zu weit führen [2]).

Für zwei parallele Drähte (z. B. Telegraphenleitungen), deren Länge l im Vergleiche mit deren Abstande a voneinander sehr groß ist, gilt die Formel

$$M = 2l\left[lgn\,\frac{2l}{a} - 1\right]^{3}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 386)$$

in absoluten Einheiten.

Für die gegenseitige Induction zwischen der primären und secundären Bewickelung eines im Vergleiche zu seinem Durchmesser sehr langen Cylinders oder eines im Vergleiche zu seinem Durchmesser sehr dünnen Ringes vom Querschnitte q und von der magnetischen Permeabilität μ ist, wenn l die Länge des bewickelten Cylinders oder den längs der Mittellinie des Ringkörpers gemessenen Umfang des Ringes bedeutet und unter der Voraussetzung einer gleichmäßigen Bewickelung [4])

$$M = \frac{4\pi m_1 m_2 \mu q}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 387)$$

wobei m_1 und m_2 die Windungszahlen der beiden Bewickelungen bedeuten.

---

[1]) Siehe meinen Grundriß der mechanischen Physik, S. 319 bis 321 (insbesondere die Formeln 332 und 334).

[2]) Näheres hierüber findet man in Benischke, Magnetismus und Electricität, S. 95 und 97. Hier möge nur noch folgendes bemerkt werden. Schreibt man die Gleichung 382 ohne Rücksicht auf das Vorzeichen in der Form $e = M\frac{di}{dt}$, so ergibt sich daraus, wenn wir M als constant voraussetzen, $edt = Mdi$ und $\int edt = Mi$. Daraus ergibt sich, daß der Coëfficient M der gegenseitigen Induction auch definirt werden kann als das Zeitintegral der electromotorischen Kraft, das in einem Leiter (II) auftritt, wenn im benachbarten Leiter (I) ein Strom von der Intensität $i = 1$ entsteht oder verschwindet. Vergl. F. Kohlrausch, Lehrbuch der practischen Physik, S. 565.

[3]) Kittler, I, S. 97 und Benischke, Magnetismus und Electricität, S. 97. Dagegen gibt Zsakula, Gleichstrommessungen, S. 271, die Formel

$$M = 2l\left[lgn\,\frac{2l}{a} - 1 + \frac{\mu}{4}\right],$$

wobei μ die magnetische Permeabilität des zwischen den Drähten befindlichen Mittels ist.

[4]) Nämlich so, daß auf jede Längeneinheit von l $\frac{m_1}{l}$ Windungen in der einen und $\frac{m_2}{l}$ Windungen in der anderen Spule kommen.

Wenn der bewickelte Cylinder oder Ring aus einem nicht magnetisirbaren Materiale (z. B. Holz) besteht, oder wenn die Drahtspulen überhaupt keinen Kern enthalten (d. h. wenn der Hohlraum der inneren Spule nur mit Luft ausgefüllt ist), kann μ als constant und $= 1$ angenommen werden. Dann ist also auch

$$M = \frac{4\pi m_1 m_2 q}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 388)$$

constant. Dagegen ist z. B. beim Vorhandensein eines Eisenkernes die Permeabilität μ und somit auch M mit der magnetisirenden Stromstärke veränderlich.

Von der Richtigkeit der Formeln 388 und 387 überzeugt man sich leicht durch folgende Betrachtung [1]).

Die Spirale mit m_1 Windungen, die wir uns von einem Strome von der Stärke i_1 durchflossen denken wollen, sei die innere. Dann ist die Feldstärke H in dem (vorderhand noch als leer angenommenen) Hohlraume dieser Spirale nach Formel 186 gegeben durch $H = \frac{4\pi m_1 i_1}{l}$ und somit die Gesammtzahl Z_0 der durch diesen Hohlraum gehenden Kraftlinien durch $Z_0 = qH = \frac{4\pi m_1 q i_1}{l}$. Wenn nun diese Spirale von einer anderen mit m_2 Windungen umgeben ist, so gehen durch jede von diesen m_2 Windungen ebenfalls Z_0 Kraftlinien und induciren darin, wenn sie in der sehr kurzen Zeit τ verschwinden, d. h. wenn der Strom i_1 in der sehr kurzen Zeit τ auf Null abfällt, eine electromotorische Kraft, die nach Formel 382 gleich sein muß $\frac{i_1}{\tau}$ multiplicirt mit dem Inductionscoëfficienten der inducirenden Spirale auf eine Windung der inducirten Spirale. Dieselbe electromotorische Kraft muß aber nach den allgemeinen Inductionsgesetzen auch gleich sein $\frac{Z_0}{\tau} = \frac{4\pi m_1 q}{l} \cdot \frac{i_1}{\tau}$. Hieraus folgt, daß der Inductionscoëfficient der inducirenden Spirale auf eine Windung der inducirten gleich ist $\frac{4\pi m_1 q}{l}$. Demnach muß, wie leicht einzusehen ist, der Inductionscoëfficient M der inducirenden Spirale auf sämmtliche m_2 Windungen der inducirten, also auf die ganze inducirte Spirale gleich sein $\frac{4\pi m_1 q}{l} \times m_2 = \frac{4\pi m_1 m_2 q}{l}$, übereinstimmend mit der Formel 388. Enthält die inducirende Spule einen Eisenkern von der Permeabilität μ, so steigt die Zahl der hier in Betracht

[1]) Vergl. die ganz ähnlichen Schlußfolgerungen über den Coëfficienten der Selbstinduction im §. 105.

kommenden Kraftlinien von Z_0 auf μZ_0 und es kommt also noch der Factor μ in den Ausdruck für den Inductionscoëfficienten, entsprechend der Formel 387.

Oft sind die primäre und secundäre Spule nicht übereinander, sondern nebeneinander angeordnet. Wenn eine solche Anordnung so ausgeführt ist, daß die in der primären Spule erzeugten Kraftlinien ohne merklichen Verlust („Streuung") auch durch die secundäre Spule gehen, gilt auch in diesem Falle die Formel 387 für den Coëfficienten M der gegenseitigen Induction. Dies trifft z. B. bei geschlossenen Eisenkernen (Ringmagneten) annähernd zu [1]), oder auch bei dicht aneinanderliegenden weiten Drahtringen.

Für die gegenseitige Induction von gleichlangen Rollen mit mehreren Lagen von Windungen wird die Formel angegeben [2])

$$M = \frac{4}{3}\pi^2 l m_1^2 m_2^2 (R - r)(r^3 - r_0^3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 389)$$

wobei l die gemeinschaftliche Spulenlänge, m_1 und m_2 die Windungszahlen der Spulen, R den äußeren, r den inneren Radius der äußeren und zugleich den äußeren Radius der inneren und r_0 den inneren Radius der inneren Spule bedeuten. Ferner für den Fall, daß ein die innere Spule ganz ausfüllender Eisenkern vorhanden ist,

$$M = 4\pi^2 l m_1^2 m_2^2 (R - r)\left[\frac{r^3 - r_0^3}{3} + 4\pi k r_0^3 (r - r_0)\right] \quad . \quad . \quad 390)$$

wobei k die Magnetisirungszahl (magnetische Susceptibilität, siehe §. 69) bedeutet.

Die Ausdrücke 375 und 387 für die Coëfficienten der Selbstinduction und der gegenseitigen Induction lassen sich vereinfachen, indem man den magnetischen Widerstand $\frac{l}{\mu q} = u$ des Spulenkernes einführt. Man erhält dann

$$L = \frac{4\pi}{u} \cdot m^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 392)$$

und

$$M = \frac{4\pi}{u} \cdot m_1 m_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 393)$$

für die gegenseitige Induction.

---

[1]) Hierher gehören auch die sogenannten polloſen Transformatoren (§. 118) mit magnetisch geschlossenem Eisenkern von Zipernowsky, Déri und Bláthy. Siehe Kittler, II, S. 300 und 301. Vergl. auch das daselbst über den Faraday'schen Ring Gesagte.

[2]) Zsakula; Gleichstrommessungen, S. 272. Ebendaselbst ist für den Coëfficienten der Selbstinduction von Spulen mit mehreren Drahtlagen (vergl. §. 105) die Formel

$$L = 4\pi^2 m^2 l d^2 r^2 \left(1 + \frac{d}{r} + \frac{d^2}{3r^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 391)$$

angeführt, wobei r den inneren Halbmesser und d die radial gemessene Dicke der Wickelung bedeuten.

Vergleicht man nun den Coëfficienten der gegenseitigen Induction $M = \frac{4\pi}{u} \cdot m_1 m_2$ der Spulen I und II mit den Coëfficienten der Selbstinduction $L_1 = \frac{4\pi}{u} \cdot m_1^2$ und $L_2 = \frac{4\pi}{u} \cdot m_2^2$ für jede der beiden einzelnen Spulen, so ergibt sich daraus die einfache Beziehung

$$M^2 = L_1 L_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 394)$$

107 **Besondere Fälle.** Besonders bemerkenswerth ist die Einrichtung, bei der auf die primäre Spule von m_1 Windungen eine aus einer geringen Anzahl m_2 Windungen bestehende kleine secundäre Spule („Probespule") aufgewickelt oder aufgeschoben ist, die mit einem ballistischen Galvanometer in Verbindung steht, während der primären Spule ein genau gemessener Strom i_1 von einer constanten Stromquelle zugeführt werden kann. Verschwindet dieser Strom, indem er durch Unterbrechung des Stromkreises innerhalb der sehr kurzen Zeit τ auf Null gebracht wird, so wird in der secundären Leitung eine Electricitätsmenge

$$q = \int_0^\tau i\,dt = \frac{1}{r}\int_0^\tau e\,dt = \frac{M i_1}{r}$$

zur Entladung gebracht, wobei r der Widerstand des das ballistische Galvanometer enthaltenden Stromkreises ist. Da nun q mit Hilfe des ballistischen Galvanometers (§. 94, Formeln 326 bis 329) bestimmt und M berechnet werden kann, während i_1 als genau gemessen vorausgesetzt wird, so ergibt sich hieraus eine absolute Messung des Widerstandes

$$r = \frac{M i_1}{q} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 395^1)$$

Eine andere Methode der absoluten Widerstandsmessung beruht auf der Anwendung des Erdinductors. Hier hat das Integral $\int e\,dt$ den Werth $2H\Sigma f$, wenn die senkrecht auf die Horizontalcomponente H des Erdmagnetismus eingestellte Drahtrolle um 180° gedreht wird und wenn Σf die Flächensumme der Windungen dieser Drahtrolle vorstellt. Man erhält dann

---

[1]) Es ist leicht zu überblicken, daß beim Uebergange von den absoluten auf die practischen Einheiten des C-G-S-Systemes der Zahlenwerth des Ausdruckes rechts vom Gleichheitszeichen 10^9 mal kleiner wird, wie es ja auch sein muß, wenn der Widerstand nicht mehr in absoluten C-G-S-Einheiten, sondern in Ohm ausgedrückt sein soll.

Ueber das Kirchhoff'sche Princip dieses Verfahrens vergleiche man F. Kohlrausch, Lehrbuch der practischen Physik, S. 476.

$$r = \frac{2 H \Sigma f}{q} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 396)$$

in abſoluten Einheiten [1]).

Ein mit der erforderlichen Anzahl von ſecundären Windungen (wie zu Anfang dieſes Paragraphen beſchrieben) verſehener Ringmagnet kann zur Unterſuchung der magnetiſchen Permeabilität der Eiſenſorte dienen, aus der das Ringeiſen hergeſtellt iſt.

Hat man in den Stromkreis der (ſecundären) Probeſpirale mit m_2 Windungen und des balliſtiſchen Galvanometers auch noch die Drahtrolle eines Erdinductors mit der Windungsflächenſumme Σf geſchaltet, ſo werden bei der Drehung dieſer ſenkrecht auf die Horizontalcomponente H des Erdmagnetismus eingeſtellten Rolle um 180 Grade $2 H \Sigma f$ Kraftlinien geſchnitten, wodurch ein Ausſchlag α am balliſtiſchen Galvanometer bewirkt wird. Wenn dann ein anderes Mal der die primäre Bewickelung (mit m_1 Windungen) des Ringmagneten durchfließende magnetiſirende Strom i umgekehrt wird und ſomit auch die von dieſem im Eiſenkern erzeugten Z Kraftlinien, ſo wird der die m_2 Windungen der Probeſpirale bildende ſecundäre Leiter von $2 m_2 Z$ Kraftlinien „geſchnitten“ und dadurch am balliſtiſchen Galvanometer ein Ausſchlag β bewirkt. Da nun bekanntlich (ſiehe auch §. 94) das Verhältniß $\frac{2 H \Sigma f}{2 m_2 Z} = \frac{\alpha}{\beta}$ beſtehen muß, ſo findet man hieraus die Kraftlinienzahl im Eiſenkern

$$Z = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{H \Sigma f}{m_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 397)$$

und ſomit auch die Kraftliniendichte B pro Flächeneinheit, $B = \frac{Z}{q}$, welche Größe, durch die Feldſtärke $\frac{4 \pi m_1 i}{l} = H$ im Hohlraume der leeren Magnetiſirungsſpirale dividirt, den Betrag der magnetiſchen Permeabilität μ bei dieſer Feldſtärke liefert, nämlich $\mu = \frac{B}{H}$ (§. 70).

Theoretiſch (nicht aber in der Anwendung) einfacher wäre die unmittelbar (d. h. ohne Benutzung des Erdinductors) auszuführende Ermittelung von μ, nämlich ausgehend von der allgemeinen Formel [2])

$$r q = \int e dt = M i \quad \ldots \ldots \ldots \quad 398)$$

wobei im vorliegenden Falle $M = \frac{4 \pi m_1 m_2 \mu q}{l} = M_0 \mu$, wenn man zur

---

[1]) Vergl. F. Kohlrauſch, Lehrbuch der practiſchen Phyſik, S. 455.

[2]) Siehe die 2. Anmerkung in §. 106.

Abkürzung $\frac{4\pi m_1 m_2 q}{l}$, nämlich den Inductionscoëfficienten für die leere Magnetisirungsspirale (ohne Eisenkern) auf die Probewindungen mit M_0 bezeichnet, also $rq = M_0 \mu i$, woraus

$$\mu = \frac{rq}{M_0 i} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 399)$$

hervorgeht. Dieses Verfahren erfordert nebst der Messung des Stromes i und der Berechnung des Inductionscoëfficienten M_0 noch die absolute Messung der beim Inductionsstoße in Bewegung gesetzten Electricitätsmenge q mittelst des ballistischen Galvanometers und die Messung des Widerstandes r im Stromkreise dieses Galvanometers und der secundären Spirale.

Wenn der Inductionsstoß auf das ballistische Galvanometer nicht durch Unterbrechung, sondern durch Umkehrung des Stromes i bewirkt worden ist, hat man die Hälfte der dabei in das Galvanometer entladenen Electricitätsmenge für q in die Formel einzusetzen.

Hierher gehört auch noch die im §. 29 (Anmerkung) erläuterte Formel

$$h = 2H \frac{F}{f} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 400)$$

für die mit der Horizontalintensität H des Erdmagnetismus verglichene Feldstärke h zwischen Magnetpolen oder zwischen Polschuh und Anker einer Dynamomaschine bei der Messung mittelst Drahtschleife (Fläche f) und Erdinductor (Flächensumme F) in Verbindung mit dem ballistischen Galvanometer (Ausschläge α und β).

V. Abschnitt.

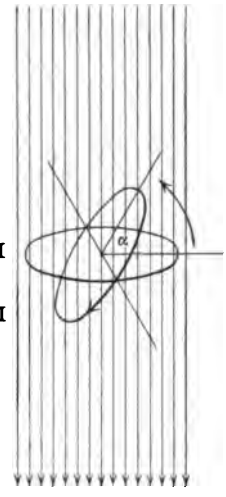
108 **Wechselströme.** Ströme, deren Intensitäten periodische Functionen der Zeit sind, nennt man Wechselströme. Hier sollen nur solche Wechselströme besprochen werden, bei denen die Function der Zeit eine Sinusfunction ist. Dieser Art von Wechselströmen kommen die in der Technik verwendeten Inductionsströme so nahe, daß die schon sehr ausgebildete Theorie der sinusförmigen Wechselströme einen sehr wesentlichen Theil der theoretischen Electrotechnik ausmacht. Deßhalb mögen die wichtigsten hierher gehörigen Lehrsätze im Nachstehenden kurz erörtert werden.

Die folgende Betrachtung zeigt beispielsweise die Entstehung eines solchen Wechselstromes.

Denken wir uns (Fig. 18) in einem homogenen magnetischen Felde von der Stärke H einen geschlossenen, z. B. kreisförmigen Leiter in der Richtung des beigefügten Pfeiles rotirend.

Wenn der Drahtkreis die Stellung I hat, bei der seine Ebene senkrecht zu den Kraftlinien des Magnetfeldes steht, wird er von HF Kraftlinien durchsetzt, wenn F die vom Drahtkreise eingeschlossene Fläche bedeutet. Bei der Stellung II des Drahtkreises, die mit der Stellung I den Winkel α einschließt, gehen offenbar nun mehr $HF \cos\alpha$ Kraftlinien durch den Drahtkreis. Bezeichnen wir diese Zahl der Kraftlinien mit z und den größten Werth HF, den diese Kraftlinienzahl für $\alpha = 0$ (Stellung I des Drahtkreises) annimmt, mit $\bar{z}$, so erhält man allgemein $z = HF \cos\alpha$ oder

Fig. 18.



$$z = \bar{z} \cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 401)$$

Rotirt der Drahtkreis gleichförmig mit der Umlaufszeit T, also mit

$$\frac{1}{T} = n = \sim \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 402\,^{1})$$

Umdrehungen in einer Secunde, und bezeichnet man mit t die Zeit, binnen der die Drehung um den Winkel α erfolgt ist, dann ist wegen $\alpha : 2\pi = t : T$, also $\alpha = \frac{2\pi}{T} \cdot t$,

$$z = \bar{z} \cos \frac{2\pi}{T} \cdot t = \bar{z} \cos wt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 403)$$

wenn man die Winkelgeschwindigkeit $\frac{2\pi}{T}$ mit w bezeichnet.

Durch diese Bewegung im Magnetfelde wird im rotirenden Drahtkreise eine electromotorische Kraft $e = -\frac{dz}{dt} = -\bar{z}\frac{d(\cos wt)}{dt}$, also

$$e = \bar{z}\, w \sin wt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 404)$$

inducirt, die für $wt = \frac{\pi}{2}$ ihren positiven Maximalwerth $\bar{e} = \bar{z}\, w$ erreicht, so, daß man

[1]) Das Zeichen $\sim$ für die Zahl der Perioden in der Secunde, also für den reciproken Werth $\frac{1}{T} = n$ der Dauer einer Periode, ist meines Wissens von Kapp eingeführt.

Die Zahl n nennt man wohl auch die Frequenz (Pariser Congreß 1889. — Ferraris, Wissenschaftliche Grundlagen der Electrotechnik, S. 249).

Die Zahl $2n$ heißt die Wechselzahl, weil der Wechselstrom während n Perioden $2n$ mal sein Vorzeichen (seine Richtung) wechselt. Der Wechselzahl entspricht auch die Zahl der Polwechsel einer Wechselstrommaschine. Siehe Kittler, II, S. 58. In unseren Zahlenbeispielen ist $n = 41{,}6$ angenommen, entsprechend einer Wechselstrommaschine von 5000 Polwechseln in der Minute.

$$e = \bar{e}\, sin\, wt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 405)$$

schreiben kann. Man erhält demnach, wenn man diese Gleichung durch den Widerstand R des Drahtkreises dividirt und $\frac{e}{R} = i$ und $\frac{\bar{e}}{R} = \bar{i}$ setzt,

$$i = \bar{i}\, sin\, wt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 406)$$

für den im rotirenden Leiter inducirten Wechselstrom.

Für die Richtung des inducirten Stromes gilt dabei folgende Regel. Wenn man so durch den Ring sieht, daß die Pfeilspitzen der Kraftlinien gegen den Beschauer gerichtet sind, so erscheint der durch eine Abnahme der den Ring durchsetzenden Kraftlinien inducirte Strom entgegengesetzt der Uhrzeigerbewegung verlaufend, und umgekehrt. Wir bezeichnen die erstere Richtung als die positive. (Vergl. Formel 360.)

Die Zeit T, binnen der von irgend einem Augenblicke (z. B. $t = t_1$) an gerechnet, dieselbe Phase (Intensität und Richtung des Stromes) wiederkehrt, heißt die Dauer einer Periode[1]). Nach Ablauf einer halben Periode oder einer ungeraden Anzahl von halben Perioden hat der Strom bei gleicher Intensität die entgegengesetzte Richtung[2]). Nach einer ungeraden Anzahl von Viertelperioden, von $t = 0$ an gerechnet, hat die Intensität des Stromes den numerischen Maximalwerth $\bar{i}$ bei abwechselnd entgegengesetzter Richtung[3]).

Der Mittelwerth der Stromintensität i innerhalb der Zeitgrenzen $t = 0$ und $t = T$ ist Null; der Mittelwerth innerhalb der Grenzen $t = 0$ und $t = \frac{T}{2}$ ist

$$M(i) = \bar{\bar{i}} = \frac{2}{\pi}\bar{i} = 0{,}6366\,\bar{i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 407[4])$$

Desgleichen gilt für den Mittelwerth der electromotorischen Kraft die analoge Gleichung

$$M(e) = \bar{e} = \frac{2}{\pi}\bar{\bar{e}} = 0{,}6366\,\bar{e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 408[5])$$

---

[1]) Es ist nämlich $sin\frac{2\pi}{T}(t_1 + T) = sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t_1 + 2\pi\right) = sin\frac{2\pi}{T}\cdot t_1$.

[2]) Dies ergibt sich aus der Gleichung

$$sin\frac{2\pi}{T}\left[t_1 + (2m+1)\frac{T}{2}\right] = sin\left[\frac{2\pi}{T}\cdot t_1 + (2m+1)\pi\right] = -sin\frac{2\pi}{T}\cdot t_1.$$

[3]) Man erhält $sin\frac{2\pi}{T}(2m+1)\frac{T}{4} = sin(2m+1)\frac{\pi}{2} = \pm 1$, je nachdem die ganze Zahl m gerade oder ungerade ist.

[4]) Wir gebrauchen die Bezeichnung $M(i)$ für den Mittelwerth von i nach Stefan (Ueber die Versuche mit den Wechselstrommaschinen von Ganz & Co. und Klimenko, Ausstellungsbericht 1883). Ich bezeichne in diesem Buche Maximalwerthe einer Größe a mit $\bar{a}$, Minimalwerthe mit $\dot{a}$ und Mittelwerthe mit $\bar{\bar{a}}$.

[5]) Die in den Formeln 407 und 408 ausgedrückten Mittelwerthe ergeben sich mit Rücksicht auf den Mittelwerth von $sin\,\alpha$ innerhalb der Grenzen $\alpha = 0$, und

Als effective Stärke eines Wechselstromes, die wir mit i' bezeichnen wollen, ilt (Pariser Congreß 1889) die Stärke eines Gleichstromes, der binnen leicher Zeit gleich viel Wärme entwickelt.

Nach dem Joule'schen Gesetze (§. 39, Anmerkung) entwickelt ein Strom i i einem Leiter vom Widerstande R während eines Zeitelementes dt die Bärmemenge

$$dW = ARi^2 dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad 410)$$

obei A das calorische Aequivalent der Arbeitseinheit (§. 23) bedeutet. Man hält demnach mit Rücksicht auf Formel 406 $dW = AR(\bar{i})^2 \sin^2 wt \,.\, dt$, nd wenn man $wt = \alpha$, also $dt = \frac{d\alpha}{w}$ einsetzt, $dW = \frac{AR}{w}(\bar{i})^2 \sin^2\alpha\, d\alpha$ $= \frac{ART}{2\pi}(\bar{i})^2 \sin^2\alpha\, d\alpha$. Für eine halbe Periode erhält man sonach

$$W = \frac{ART}{2\pi}(\bar{i})^2 \int_0^{\pi} \sin^2\alpha\, d\alpha = \frac{ART}{2\pi}(\bar{i})^2 \,.\, \frac{\pi}{2} = \frac{ART}{4}(\bar{i})^2.$$ Also

rhält man für eine Secunde, indem man mit $\frac{T}{2}$ dividirt,

$$W = AR\frac{(\bar{i})^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 411)$$

Bezeichnet man nun den äquivalenten Gleichstrom, wie oben, mit i', so muß $Ri'^2 = AR\frac{(\bar{i})^2}{2}$ sein, folglich

$$i' = \frac{\bar{i}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,\bar{i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 412)$$

nd analog

$$e' = \frac{\bar{e}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,\bar{e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 413)$$

nn man die effective electromotorische Kraft mit e' bezeichnet.

Diese Effectivwerthe von i und e sind übereinstimmend mit den Quadratrzeln aus den Mittelwerthen der Quadrate von i und e. Denn es ist

---

$= \pi$, nämlich $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\pi}$ nach der allgemeinen Formel für den Mittelth einer $f(x)$ zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$, nämlich

$$M_a^b\big[f(x)\big] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad 409)$$

iehe meinen Grundriß der mechanischen Physik, S. 34 und 35.)

z. B. $M(i^2) = M_0^{\pi}(\bar{i}\ sin\ \alpha)^2 = (\bar{i})^2 \,.\, M_0^{\pi}(sin^2\alpha) =$

folgt

$$i' = \sqrt{M(i^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

und analog

$$e' = \sqrt{M(e^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Diese Mittelwerthe (i' und e') erhält man auch bei Strom- messungen mit Electrodynamometern oder Hitzdraht-Instrum. bei der Messung mit Instrumenten, deren Anzeigen von d. unabhängig sind [1]).

Man hat demnach viererlei Stromwerthe zu unterscheid. blickliche Stromstärke i, die maximale Stromstärke $\bar{i}$, den arith. werth $\bar{\bar{i}}$ und die effective Stromstärke i'. Das Analoge gilt motorische Kraft.

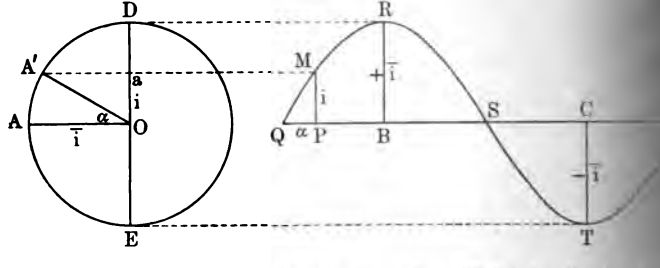
Dabei bestehen zwischen den arithmetischen Mittelwerthen a. Werthen 407, 408, 412 und 413 noch die Beziehungen

$$\bar{\bar{i}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot i' \doteq 0{,}9\, i' \quad . \quad .$$

$$\bar{\bar{e}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot e' \doteq 0{,}9\, e' \quad . \quad .$$

Den Verlauf eines dem Sinusgesetze entsprechenden oder, zu sagen pflegt [2]), harmonischen Wechselstromes kann man mi.

Fig. 19.



curve $QRSTU$ (Fig. 19) oder in folgender Weise durch ein fol. Vectoren-Diagramm veranschaulichen.

---

[1]) Man nennt deßhalb die Effectivwerthe i' und e' auch oft die ge. Werthe. Sie können in homogenen Gleichungen stets durch die propor. Maximalwerthe (Formeln 412 u. 413) ersetzt werden. Ist z. B. $(\bar{i})^2 = (\bar{i}_1)^2 + 2\,\bar{i}_1\,\bar{i}_2\ cos\ \varphi$, so ist auch $i'^2 = i_1'^2 + i_2'^2 + 2\,i_1'\,i_2'\ cos\ \varphi$.

[2]) Bedell und Crehore, Theorie der Wechselströme u. A.

Der Radius $OA = \bar{i}$ eines Kreises rotirt in der der Uhrzeiger-Bewegung entsprechenden Richtung [1]) mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $w = \frac{2\pi}{T}$, wobei in der Zeit t der Drehungswinkel $\alpha = wt$ (im Sinus-Diagramm der Abscisse QP entsprechend) zurückgelegt wird. Dann stellt die Projection Oa des in die Lage OA' vorgerückten Radius auf den zur ursprünglichen Lage OA senkrechten Kreisdurchmesser DE den augenblicklichen Werth i der Stromstärke zur Zeit t vor (im Sinus-Diagramm der Ordinate MP entsprechend).

Induction durch Wechselströme. Wird ein Wechselstrom durch eine 109
Drahtrolle, die den Selbstinductions-Coëfficienten L hat (§. 104), geführt, so wird in dieser eine mit der Stromstärke, also ebenfalls periodisch, veränderliche Kraftlinienzahl $z = Li$, also

$$z = L\bar{i} \sin wt \quad \ldots \ldots \ldots \quad 418)$$

wobei $\bar{z} = L\bar{i}$ ist, hervorgerufen und dadurch in der Drahtrolle eine gleichfalls periodisch veränderliche electromotorische Kraft η inducirt. Um die nähere Betrachtung dieses Vorganges zu vereinfachen, sei zunächst angenommen, daß sich die Drahtrolle in einem Mittel von der constanten magnetischen Permeabilität $\mu = 1$ (z. B. Luft) befinde und also auch keinen Eisenkern enthalte. Es ist dann auch L als constant anzusehen und man erhält für die electromotorische Kraft η der Selbstinduction (nach Formel 360)

$$\eta = -\frac{dz}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt} = -L\bar{i}\, w \cos wt \quad \ldots \quad 419)$$

oder

$$\eta = L\bar{i}\, w \sin\left(wt - \frac{\pi}{2}\right) \quad \ldots \ldots \quad 420)$$

wobei

$$\bar{\eta} = L w \bar{i} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 421)$$

Demnach ist die electromotorische Kraft der Selbstinduction in der Phase um $\frac{\pi}{2}$ hinter dem Wechselstrome zurück.

In der Fig. 20 ist dies durch ein Vectoren-Diagramm veranschaulicht, in dem $OA = \bar{i}$ den Maximalwerth des Stromes und der senkrecht darauf nach abwärts gerichtete Vector OC' den Maximalwerth $\bar{\eta} = \bar{i}Lw$ der electromotorischen Kraft der Selbstinduction darstellt.

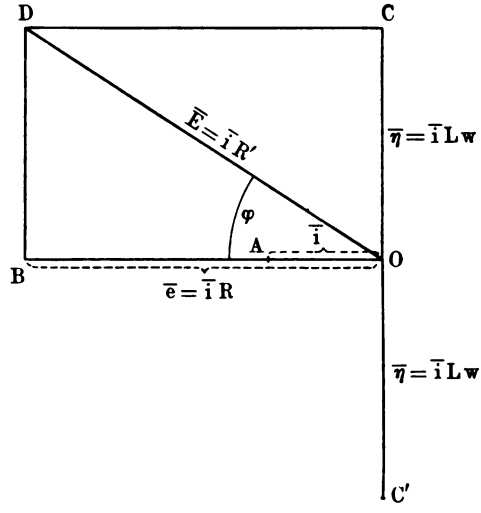
Wir benutzen diese Zeichnung noch zur geometrischen Darlegung eines richtigen Lehrsatzes.

[1]) Eine derartige Zeichnung wird deßhalb auch clock-diagram = Uhr-Diagramm genannt.

Durch Multiplication des Stromwerthes $\bar{i}$ mit dem Widerstande R der betrachteten Drahtrolle gewinnen wir den durch den Vector OB dargestellten Maximalwerth $\bar{e} = \bar{i}R$ des Spannungsverlustes in der Drahtrolle, welche Größe also mit dem Strome von gleicher Phase ist.

Es ist nun einleuchtend, daß die an den Klemmen der Drahtrolle wirkende Potentialdifferenz E, die sogenannte Klemmenspannung[1]), wenn der betrachtete Wechselstrom $i = \bar{i} \sin wt$ in der Rolle unterhalten werden soll, den beiden vorgenannten electromotorischen Kräften das Gleichgewicht halten muß. Eine Componente derselben muß also den Spannungsverlust im Leiter bestreiten, also den Strom i durch den Leiter vom Widerstande R treiben, und die andere Componente muß die electromotorische Kraft der Selbstinduction compensiren, also dieser gleich und entgegengesetzt sein.

Fig. 20.



Wenn man also die, wie wir gesehen haben, dem Strome in der Phase um $\frac{\pi}{2}$ zurückstehende electromotorische Kraft der Selbstinduction, oder vielmehr die sie darstellende Gerade OC' im entgegengesetzten Sinne als Gerade $OC = OC'$ aufträgt, so wird die Diagonale OD des aus $OB = \bar{e}$ und $OC = \bar{\eta}$ construirten Parallelogrammes offenbar den Maximalwerth $\bar{E}$ der Klemmenspannung E darstellen und, wie zugleich ersichtlich ist, dem Strome in der Phase um den Betrag $\varphi = arctg \frac{\bar{\eta}}{\bar{e}} = arctg \frac{Lw}{R}$ voraus sein. Es bestehen also die Gleichungen

$$(\bar{E})^2 = (\bar{e})^2 + (\bar{\eta})^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 422)$$

$$tg\, \varphi = \frac{Lw}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 423)$$

wobei man, wenn von der Annahme

$$E = \bar{E} \sin wt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 424)$$

[1]) Ueber Klemmenspannung siehe auch §. 103, zweite Anmerkung.

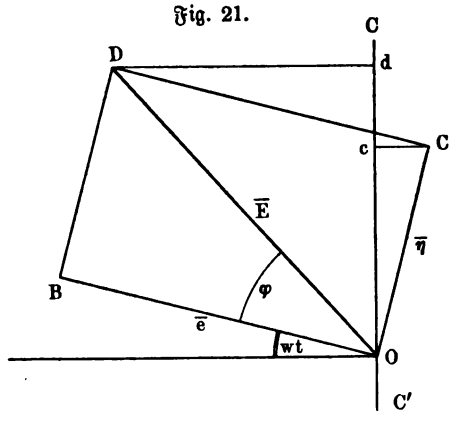
ausgegangen wird [1]), als Stromgleichung

$$i = \bar{i} \sin (wt - \varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 427)$$

erhielt.

Wird das Parallelogramm $OBDC$ in der Zeichnungsebene um den Punkt O mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit $w = \frac{2\pi}{T}$ im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers gedreht, so werden die Vectoren $OB = \bar{e}$, $OD = \bar{E}$ und $OC = \bar{\eta}$ in der Zeit t um einen Winkel $\alpha = wt$ nach rechts vorgerückt sein und in diesem Augenblicke erscheinen, wie die Fig. 21 veranschaulicht, cd, Od und Oc als ihre Projectionen auf CC'. Diese stellen also der Reihe nach die augenblicklichen Werthe des Spannungsverlustes e, der Klemmenspannung E und der electromotorischen Kraft η der Selbstinduction dar, wobei sofort ersichtlich ist

Fig. 21.



$$E = e + \eta \quad \ldots \ldots \ldots \quad 428)$$

oder

$$E = iR + L\frac{di}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 429\,[2])$$

während für die Maximalwerthe dieser drei Größen die Gleichung 422 gilt [3]).

---

[1]) Das heißt von der Annahme, daß für $t = 0$ auch $E = 0$ ist, für welchen Fall dann im Vectoren-Diagramm, Fig. 19, der Vector $OD = \bar{E}$ senkrecht auf CC' stehen und der Vector $OB = \bar{e}$ mit OC den Winkel $\frac{\pi}{2} + \varphi$ einschließen müßte. Geht man hingegen von der Annahme aus $i = \bar{i} \sin wt$, in welchem Falle also für $t = 0$ nicht E, sondern $i = 0$ wird (entsprechend der Fig. 19), dann gelten die Gleichungen

$$E = \bar{E} \sin (wt + \varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 425)$$

$$i = \bar{i} \sin wt \quad \ldots \ldots \ldots \quad 426)$$

[2]) Vergl. Formel 282.

[3]) Um die den Werth $E = e + \eta$ vorstellende Streckensumme besser übersichtlich zu machen, ist anstatt der Projection des Vectors OB die gleiche Projection der mit OB gleichen und parallelen Geraden CD in Betracht gezogen worden, nämlich die Projection cd, von der sofort ersichtlich ist, daß sie mit Oc zusamr die Projection von OD darstellt.

Wegen der Phasendifferenz φ zwischen $\bar{e}$ und $\bar{E}$ und der Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$ zwischen $\bar{e}$ und $\bar{\eta}$ besteht in diesem Falle die Gleichung 423.

110 **Leistung der Wechselströme.** Die Stromleistung wird nach dem Vorausgegangenen (§. 50, Formel 150) für jeden Augenblick ausgedrückt durch das Product ei[1]); somit beträgt die während eines Zeitelementes dt geleistete Stromarbeit $dW = eidt$ und also, wenn keine Phasendifferenz vorhanden ist, $dW = \bar{e}\sin wt \times \bar{i}\sin wt \times dt = \bar{e}\bar{i}\sin^2 wt\,.\,dt$. Man erhält demnach für die Zeiteinheit[2])

$$W = \frac{\bar{e}\bar{i}}{2} = e'i' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 430)$$

Ist jedoch eine Phasendifferenz φ vorhanden, indem z. B. $e = \bar{e}\sin wt = \bar{e}\sin\alpha$ und $i = \bar{i}\sin(wt - \varphi) = \bar{i}\sin(\alpha - \varphi) = \bar{i}\sin\beta$, so ergibt sich

$$W = \frac{\bar{e}\bar{i}}{2}\cos\varphi = e'i'\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 431)$$

Die einfachste Nachweisung dieses Satzes dürfte wohl folgende sein[3]).

Für das auf einen bestimmten Zeitpunkt folgende Zeitelement dt sei

$$eidt = \bar{e}\bar{i}\sin\alpha\,.\sin\beta\,.\,dt;$$

eine Viertelperiode später $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right.$ und $\left.\beta + \frac{\pi}{2}\right)$ ist für das nächstfolgende Zeitelement dt

$$eidt_1 = \bar{e}\bar{i}\cos\alpha\cos\beta\,.\,dt;$$

die Summe dieser beiden Arbeitselemente $2eidt = \bar{e}\bar{i}\cos(\alpha - \beta)\,dt$

---

[1]) Dabei wollen wir jetzt unter e nicht mehr speciell den in den vorausgegangenen Betrachtungen (Figg. 20 und 22) mit e bezeichneten Spannungsverlust, sondern im Allgemeinen eine bei der Arbeitsleistung eines Stromes in Betracht kommende Potentialdifferenz verstehen, also z. B. die Klemmenspannung an einem den Strom i abgebenden oder aufnehmenden Apparate.

[2]) $\bar{e}\bar{i}\sin^2 wt\,dt = \frac{\bar{e}\bar{i}}{w}\sin^2 wt\,d(wt) = \bar{e}\bar{i}\,.\frac{T}{2\pi}\sin^2\alpha\,d\alpha,$

also

$$\bar{e}\bar{i}\,.\frac{T}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\alpha\,d\alpha = \frac{\bar{e}\bar{i}}{2}\,.\,T;$$

dies ist die Arbeit für die Zeit T einer Periode, folglich $\frac{\bar{e}\bar{i}}{2}$ für eine Secunde.

Die hier zur Anwendung kommende allgemeine Integralformel ist

$$\int\sin^2\alpha\,d\alpha = -\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\alpha}{2} + C \quad . \quad . \quad . \quad 429a)$$

[3]) Vergl. Schumann, Einführung in die neuere Electricitätslehre (1898), S. 198 und Erhard, Einführung in die Electrotechnik (1897), S. 85.

$= \bar{e}\bar{i} \cos\varphi \, dt$ innerhalb der Zeitgrenzen $t = 0$ und $t = 1$ integrirt, gibt $W = \frac{\bar{e}\bar{i}}{2} \cos\varphi = e' i' \cos\varphi$, wie in Formel 431 [1]).

Der Werth $e' i' \cos\varphi$ einer Stromleistung ist jener, den das Wattmeter anzeigt, und kann mit dem Producte der durch Einzelnmessungen mit Electrodynamometern oder Hitzdrahtinstrumenten gefundenen Werthe für electromotorische Kraft und Stromstärke nur dann übereinstimmen, wenn keine Phasendifferenz zwischen diesen beiden Größen besteht, wenn also wegen $\varphi = 0$ $\cos\varphi = 1$ ist. Dies setzt voraus, daß keine Selbstinduction stattfinde, was z. B. beim Wechselstrombetriebe von Glühlampen annähernd zutrifft. Im Allgemeinen nennt man Leiter ohne Selbstinduction, wie z. B. bifilar gewickelte Drahtspulen, inductionsfrei, die mit Selbstinduction behafteten hingegen inductive Leiter.

Der Umstand, daß man für eine electrische Leistung bei der Messung mit dem Wattmeter und bei Einzelnmessungen von Strom und Spannung nur dann denselben Werth erhält, wenn keine Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung besteht, hat in der Praxis dazu geführt, zwischen Watt und Voltampère in der Art zu unterscheiden, daß man eine electrische Leistung in „Watt" oder „Voltampère" angibt, je nachdem man sie mit dem Wattmeter gemessen, oder durch Einzelnmessungen ermittelt hat.

Kehren wir nun auf das durch die Figuren 20 und 22 dargestellte Beispiel zurück. Es ist sofort ersichtlich, daß zwischen dem Strome i und der zur Bestreitung des Spannungsverlustes $e = iR$ erforderlichen Componente der Klemmenspannung E keine Phasendifferenz besteht; die auf die Ueberwindung des Ohm'schen Widerstandes R bezügliche Stromleistung wird also durch $\frac{\bar{e}\bar{i}}{2} = e' i'$ ausgedrückt werden.

Hingegen wird durch die Selbstinduction kein Aufwand an Stromleistung beansprucht, denn zwischen i und η besteht die Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$, weßhalb die Stromleistung $\frac{\bar{\eta}\bar{i}}{2} \cos\frac{\pi}{2} = \eta' i' \cos\frac{\pi}{2} = 0$ ist.

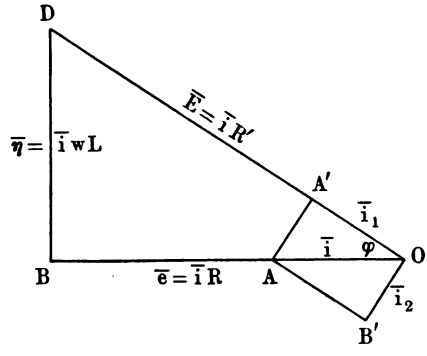
Wir wollen diese Verhältnisse auch noch aus einem anderen Gesichtspunkte betrachten.

In der Fig. 20 haben wir mit Beibehaltung der gegebenen Stromstärke $\bar{i}$ die Klemmenspannung $\overline{E}$ in die Componenten $\bar{e}$ und $\overline{\eta}$ zerlegt und auf diese Art ein „Dreieck der electromotorischen Kräfte" OBD erhalten. Wir können aber auch mit Beibehaltung der Klemmenspannung $\overline{E}$ den Strom $\bar{i}$ in

[1]) Bei dieser Berechnung denken wir uns die einer endlichen Zeit (z. B. einer Secunde) entsprechenden Arbeitselemente in der Art paarweise zusammengefaßt, daß die zwei Arbeitselemente eines Paares immer durch eine Viertelperiode getrennt sind.

Componenten zerlegen und erhalten dann ein „Stromdreieck"; zu diesem Zwecke fällen wir aus dem Punkte A der Geraden OB in Fig. 22, nämlich aus dem Endpunkte des den Maximalstrom $\bar{i}$ vorstellenden Vectors OA ein Perpendikel auf OD. Denken wir uns den Fußpunkt dieses Perpendikels mit A' bezeichnet, dann stellt OA' die in die Gerade OD fallende, also mit der electromotorischen Kraft $\bar{E}$ in gleicher Phase stehende Componente $\bar{i}_1 = \bar{i} \cos\varphi$ vor, die man den Nutzstrom zu nennen pflegt, während die andere durch AA', oder vielmehr durch die im Punkte O angebrachte gleiche und parallele Gerade OB' vorgestellte Componente $\bar{i}_2 = \bar{i} \sin\varphi$ als nutzloser oder „wattloser" Strom bezeichnet wird. Die Leistung der Stromcomponente $\bar{i}_1$ ist nämlich, da sie in der Phase mit der Klemmenspannung $\bar{E}$ übereinstimmt, offenbar $= \frac{\bar{E}\bar{i}_1}{2} \cos 0 = \frac{\bar{E}\bar{i}_1}{2}$; dagegen die Leistung der Stromcomponente $\bar{i}_2$, da sie in der Phase um $\frac{\pi}{2}$ hinter der Klemmenspannung $\bar{E}$ zurück ist, gleich $\frac{\bar{E}\bar{i}_2}{2} \cos\frac{\pi}{2}$ $= 0$. — Setzt man in den so erhaltenen Ausdrücken $\frac{\bar{E}\bar{i}_1}{2}$ und $\frac{\bar{E}\bar{i}_2}{2} \cos\frac{\pi}{2}$ die Werthe $\bar{i}_1 = \bar{i} \cos\varphi$ und $\bar{i}_2 = \bar{i} \sin\varphi$ ein, so erhält man zunächst $\frac{\bar{E}\bar{i}}{2} \cos\varphi$ und $\frac{\bar{E}\bar{i}}{2} \sin\varphi \cos\frac{\pi}{2}$; im ersteren Ausdrucke kann man $\bar{E}\cos\varphi = \bar{e} = \bar{i}R$ (Fig. 20) einsetzen und im zweiten $\bar{E}\sin\varphi = \bar{\eta}$. Man erhält dann die Leistungswerthe $\frac{\bar{e}\bar{i}}{2}$ und $\frac{\bar{\eta}\bar{i}}{2} \cos\frac{\pi}{2} = 0$, die sich uns früher aus der Betrachtung des Dreieckes der electromotorischen Kräfte (Fig. 20) ergeben haben. Das Stromdreieck $AA'OB'$ in Fig. 22 führt also zu denselben Resultaten[1]).

Fig. 22.



111 **Inductiver Widerstand.** Aus der Gleichung 422 ergibt sich, wenn man für $\bar{E}$, $\bar{e}$ und $\bar{\eta}$ die aus der Fig. 20 ersichtlichen Werthe $E = \bar{i}R'$;

[1]) Näheres über die vom Stromdreiecke ausgehende Behandlungsart der Wechselstromprobleme findet man in Feldmann's Buche über Wechselstromtransformatoren.

$\bar{e} = \bar{i}R$ und $\bar{\eta} = \bar{i}Lw$ einsetzt und die Gleichung durch $(\bar{i})^2$ dividirt, die Gleichung

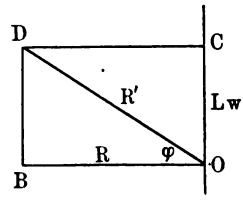
$$R'^2 = R^2 + L^2w^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 432)$$

Hier bedeutet R den mit Gleichstrom gemessenen Widerstand des betrachteten Leiters, nämlich den Widerstand des Leiters ohne Selbstinduction. Man nennt diesen Widerstand den Ohm'schen Widerstand.

Mit Rücksicht auf die Gleichung für die electromotorische Kraft der Selbstinduction $\bar{\eta} = \bar{i}Lw$ erscheint ferner die Größe Lw gleichfalls als Analogon eines Widerstandes, den man den inductiven Widerstand oder die Inductanz nennt [1]).

Endlich erscheint mit Rücksicht auf die Gleichung $\bar{E} = \bar{i}R'$, also $\bar{i} = \frac{\bar{E}}{R'} = \frac{\bar{E}}{\sqrt{R^2 + L^2w^2}}$ die Größe $R' = \sqrt{R^2 + L^2w^2}$ als der Widerstand, der für die bei der Klemmenspannung $\bar{E}$ entstehende Stromstärke $\bar{i}$ maßgebend ist. Man nennt deßhalb die Größe, deren Quadrat der Summe der Quadrate des Ohm'schen und des inductiven Widerstandes gleich ist, den scheinbaren Widerstand oder auch die Impedanz.

Fig. 23.



Zwischen diesen Widerständen besteht also die durch das Widerstandsdreieck Fig. 23 veranschaulichte Beziehung 432, wobei $w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$, folglich Lw eine mit der Periodenzahl wachsende Größe ist.

Ferner gelten, wie aus dem Gesagten mit Rücksicht auf Fig. 23 ersichtlich ist, die Gleichungen

$$R = R' \cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 433)$$

$$l = Lw = R' \sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad 434)$$

Aus dem Gesagten schließen wir zunächst folgendes. Es sei die Klemmenspannung $E = \bar{E} \sin wt$ gegeben. Dann wird die maximale Stromstärke $\bar{i} = \frac{\bar{E}}{R'} = \frac{\bar{E}}{\sqrt{R^2 + L^2w^2}}$ sein. Da nun der Strom in der Phase um einen gewissen Betrag φ gegen die Klemmenspannung verzögert ist, ergibt sich für die augenblickliche Stromstärke i zur Zeit t

$$i = \frac{\bar{E}}{\sqrt{R^2 + L^2w^2}} \sin(wt - \varphi) \quad \ldots\ldots \quad 435)$$

[1]) Manche Autoren verstehen unter Inductanz den Selbstinductions-Coëfficienten und nennen den inductiven Widerstand die Reactanz. (Ferraris, S. 265.)

woraus ersichtlich ist, wie durch die Selbstinduction sowohl eine Schwächung des Stromes durch das Hinzutreten des inductiven Widerstandes, als auch eine Verzögerung des Stromes in der Phase verursacht wird.

Beispiele. 1. Die im Beispiele des §. 105 bereits beschriebene Drahtrolle hat den Ohm'schen Widerstand $R = 9{,}78$ Ohm. Bei einer Klemmenspannung $E' = 51{,}9$ Volt war die gemessene Stromstärke $i' = 2{,}3$ Ampère, während in einem inductionsfreien Leiter von gleichem Ohm'schen Widerstande die Stromstärke $\frac{51{,}9}{9{,}78} = 5{,}3$ Ampère hätte eintreten müssen. Es ergibt sich hieraus der scheinbare Widerstand $R' = \frac{51{,}9}{2{,}3} = 22{,}57$ Ohm und der inductive Widerstand $Lw = \sqrt{22{,}57^2 - 9{,}78^2} = 20{,}33$ Ohm. Da nun bei der Periodenzahl $\frac{1}{T} = n = 41{,}6$ des angewendeten Wechselstromes die Größe $\frac{2\pi}{T} = w = 262$ ist, ergibt sich $L = \frac{20{,}33}{262} = 0{,}0776$ Henry. Nach der Formel 423 ergibt sich hieraus ferner die Phasendifferenz zwischen E und i, nämlich $\varphi = arctg \frac{Lw}{R} = arctg \frac{20{,}33}{9{,}78} = 64^0\ 18'$. Für die Stromleistung $E' i' \cos\varphi$ erhält man demnach $51{,}9 \times 2{,}3 \times \cos 64^0\ 18' = 51{,}7$ Watt. Die Arbeit wird lediglich im Ohm'schen Widerstande geleistet, denn es ist auch $Ri'^2 = 9{,}78 \times 2{,}3^2 = 51{,}7$. Der gesammte Spannungsverlust $E' = i' R'$ in der Drahtrolle ist $22{,}57 \times 2{,}3 = 51{,}9$ Volt; in einer inductionsfreien Rolle von gleichem Ohm'schen Widerstande 9,78 würde er bei gleicher Stromstärke nur $9{,}78 \times 2{,}3 = 22{,}5$ Volt betragen. Der Wattverlust in der Rolle wäre bei gleicher Stromstärke in beiden Fällen gleich.

2. Noch viel auffallender sind die Erscheinungen der Selbstinduction bei Drahtspulen mit Eisenkernen, wie nachstehende Versuche zeigen [1]).

Die Bewickelung eines Ringmagneten (nämlich die primäre Wickelung eines Transformators bei geöffneter secundärer Wickelung) wurde an ein Wechselstromleitungsnetz (von 41,6 Perioden pro Secunde) angeschlossen. Die Klemmenspannung betrug 1890 Volt und erzeugte einen Strom von 0,36 Ampère, während dieselbe Klemmenspannung in einem inductionsfreien Leiter von gleichem Widerstande, nämlich 2,5 Ohm, eine Stromstärke von $\frac{1890}{2{,}5} = 756$ Ampère hätte erzeugen müssen. Der angeführte Versuch weiset also auf einen scheinbaren Widerstand von $\frac{1890}{0{,}36} = 5250$ Ohm hin. Für

[1]) Von Herrn Director G. Frisch ausgeführt und mir freundlich mitgetheilt.

die vom Ringmagnet aufgenommene electrische Leistung würde man, wenn man sie ohne Rücksicht auf Selbstinduction nach dem Werthe des Productes $e' i'$ berechnen wollte, $1890 \times 0{,}36 = 680$ Watt erhalten. Die Messung mit dem Wattmeter hat aber nur 240 Watt ergeben, was nach der Formel 431 einer Phasendifferenz $\varphi = arc\,cos\,\frac{240}{680} = 69^0\,20'$ entspricht. Wollte man aus dieser Phasendifferenz und dem vorhin angeführten scheinbaren Widerstande mittelst des Dreieckes der Widerstände (Formel 433) den Ohm'schen Widerstand berechnen, so würde man einen vom unmittelbar gemessenen weit abliegenden Werth erhalten, was auf den vorhandenen Eisenkern zurückzuführen ist. Denn die in der Formel 433 ausgedrückte Beziehung des wahren Ohm'schen Widerstandes zum inductiven und scheinbaren Widerstande gilt nur unter der schon im §. 109 vorausgeschickten Annahme, daß die Umgebung des betrachteten Leiters von constanter Permeabilität, daß also namentlich kein Eisen in dessen Nähe sei [1]).

3. Von einem Vorschaltwiderstande für eine mit Wechselstrom betriebene Bogenlampe sei verlangt, daß er nicht mehr als 40 Watt verbrauche, während die Betriebsspannung (siehe Fig. 24) $\Delta = 50$ Volt, die Klemmenspannung der Lampe $\delta = 30$ Volt und der Strom $J = 6$ Ampère sein soll [2]). Damit ist also angenommen, daß im ganzen Stromkreise $30 \times 6 + 40 = 220$ Watt verbraucht werden, während die von einem inductionsfreien Apparate bei der Klemmenspannung $\Delta = 50$ und beim Strome $J = 6$ aufgenommene Leistung $= 50 \times 6 = 300$ Watt zu setzen wäre. Es muß also eine Phasendifferenz zwischen Δ und J bestehen vom Betrage $\varphi = arc\,cos\,\frac{220}{300} = 42^0\,50'$.

Die Kenntniß dieser Größe gestattet die Berechnung des Spannungsverlustes $\delta + e$, den die Lampe und der Ohm'sche Widerstand r der vorgeschalteten Spule zusammengenommen verursachen, nämlich

$$50 \times cos\,42^0\,50' = 50 \times 0{,}7\dot{3} = 36{,}\dot{6},$$

wovon $\delta = 30$ Volt auf die Lampe entfallen und also $e = 6{,}\dot{6}$ Volt auf die vorgeschaltete Spule, deren Ohm'scher Widerstand demnach

$$r = \frac{e}{J} = \frac{6{,}\dot{6}}{6} \doteq 1{,}1 \text{ Ohm}$$

sein muß. Für die electromotorische Kraft der Selbstinduction ergibt sich

---

[1]) Siehe J. Sahulka, Verwendung der Condensatoren im Wechselstrombetriebe. E. T. Z. 1893.

[2]) Rühlmann, Wechselstromtechnik (1897), S. 29 und 228. Auch die in diesem Beispiele für Ströme und Spannungen angegebenen Zahlen sind Effectivwerthe.

$$\eta = L w J = 50 \times \sin 42^0\,50' = 50 \times 0{,}68 = 34,$$

woraus sich, da w und J als gegebene Größen angesehen werden können, auch der Selbstinductionscoëfficient L ergibt.

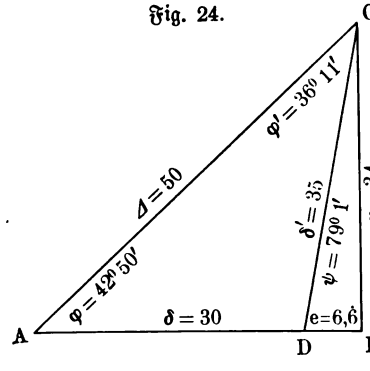
Für die Klemmenspannung δ' an der Spule findet man, da

$$\frac{\eta}{e} = \frac{34}{6{,}6} = 5{,}15\cdots = tg\ 79^0\,1' = tg\,\psi \text{ ist, } \delta' = \frac{e}{\cos\psi} = \frac{6{,}6}{0{,}19} = 35.$$

Als Gesammtspannungsverlust in Lampe und Spule darf man nun nicht die arithmetische Summe $\delta + \delta'$, sondern man muß die mit Rücksicht auf die Phasendifferenz ADC (Fig. 24) zwischen δ und δ' sich ergebende sogenannte „geometrische Summe" dafür einsetzen, nämlich $\sqrt{\delta^2 + \delta'^2 - 2\,\delta\,\delta'\cos ADC}$ gleich der Summe der Projectionen von $\delta = 30$ und $\delta' = 35$ auf die Gerade AC, d. i. in runden Zahlen $22 + 28 = 50$.

Wollte man die Betriebsspannung $\Delta = 50$ durch einen inductionsfreien Vorschaltewiderstand auf den Betrag der Lampenspannung $\delta = 30$ reduciren, also einen Spannungsverlust von 20 Volt bewirken, so wäre dazu bei der Stromstärke $J = 6$ ein Ohm'scher Spulenwiderstand $R = \frac{20}{6} = 3\frac{1}{3}$ Ohm erforderlich. Damit würde aber ein Wattverbrauch im Betrage von $J^2R = 6^2 \times 3\frac{1}{3} = 120$ Watt verbunden sein, also das Dreifache des Wattverbrauches der vorhin besprochenen inductiven (d. i. mit Selbstinduction behafteten) Vorschaltspule. Analoges folgt auch schon aus dem ersten Beispiele zu diesem Paragraphen. Dies beruht, wie im §. 110 bereits dargethan worden ist, darauf, daß nur der Ohm'sche, nicht aber auch der inductve Widerstand einen Arbeitsverlust verursacht. Mit Rücksicht auf das Stromdreieck (Fig. 22) kann man auch sagen, daß beim Wattverluste in einer inductiven Spule nur der Nutzstrom, nicht aber auch die „wattlose" Stromcomponente in Betracht kommt.

Fig. 24.



Wir haben damit das Princip der sogenannten Drosselspulen erläutert.

112 **Hintereinander und nebeneinander geschaltete inductive Leiter.** Wir bezeichnen für die in Fig. 25 mit I und II bezeichneten Leiter AB und BC die Ohm'schen Widerstände mit r_1 und r_2; die inductiven Widerstände mit $l_1 = L_1 w$ und $l_2 = L_2 w$; die scheinbaren Widerstände mit r_1' und r_2'; die Phasendifferenzen zwischen dem Strome J und den Klemmenspannungen

Δ_{AB} und Δ_{BC} in A und B und in B und C mit φ_1 und φ_2 und endlich die Selbstinductionscoëfficienten mit L_1 und L_2. Wir machen folgende Annahmen [1]):

Für I sei $r_1 = 30\,\Omega$, $L_1 = 0{,}038$; folglich, wenn

$$w = 2\pi n = 2\pi \times 41{,}6 \doteq 262,$$

$$l_1 = w_1 L_1 = 262 \times 0{,}038 \doteq 10.$$

Für II sei $r_2 = 20\,\Omega$, $L_2 = 0{,}114 = 3 \times 0{,}038$, folglich

$$l_2 = w L_2 = 262 \times 0{,}114 \doteq 30.$$

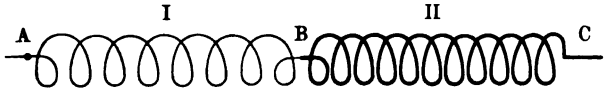
Hieraus folgt:

$$r_1' = \sqrt{30^2 + 10^2} = 31{,}62;$$

$$r_2' = \sqrt{20^2 + 30^2} = 36{,}06.$$

Construirt man ferner ein rechtwinkeliges Dreieck (Fig. 26), dessen eine Kathete die Summe der Ohm'schen Widerstände $30 + 20 = 50$ und dessen andere

Fig. 25.



Kathete die Summe der inductiven Widerstände $10 + 30 = 40$ ist, so stellt die Hypotenuse $\sqrt{50^2 + 40^2} = 64{,}03 = R'$ den scheinbaren Widerstand der

Fig. 26.

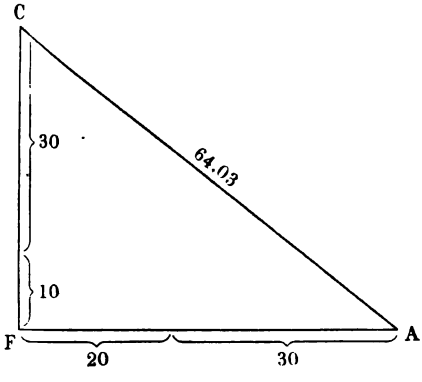
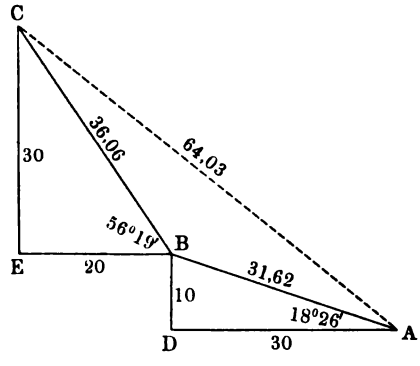


Fig. 27.



hintereinander geschalteten Leiter I und II zusammengenommen dar, also den scheinbaren Widerstand zwischen A und C, der sich auch in der aus Fig. 27 ersichtlichen Weise mit Hilfe der Widerstandsdreiecke für die beiden Leiter (oder Apparate) I und II hätte finden lassen.

[1]) Vergl. Feldmann, Wechselstromtransformatoren, S. 58 bis 62.

Da das Widerstandsdreieck dem Dreiecke der electromotorischen Kräfte stets ähnlich sein muß, werden die Tangenten der Winkel BAD und CBE, nämlich $\frac{10}{30} = tg\ 18^0\ 26'$ und $\frac{30}{20} = tg\ 56^0\ 19'$ auch die Tangenten der in den beiden Leitern zwischen Strom und Klemmenspannung bestehenden Phasendifferenzen sein. Zwischen den beiden Klemmenspannungen (Δ_{AB} in A und B und Δ_{BC} in B und C) unter sich besteht also, wie aus der Fig. 27 leicht ersehen werden kann, die Phasendifferenz

$$180^0 - (56^0\ 19' - 18^0\ 26') = 180^0 - 37^0\ 53' = 142^0\ 7',$$

woraus sich ergibt:

$$AC = \sqrt{31{,}62^2 + 36{,}06^2 - 2 \times 31{,}62 \times 36{,}06 \times cos\ 142^0\ 71'} = 64{,}03,$$

wie vorhin.

Denkt man sich nun die hintereinander geschalteten Leiter I und II zunächst inductionsfrei oder mit einer Gleichstromquelle verbunden und an den Klemmen A und C eine Spannung von 100 Volt angebracht, so würde sich mit Rücksicht auf die Ohm'schen Widerstände in I und II die Stromstärke $\frac{100}{20 + 30} = 2$ Ampère ergeben müssen. Dagegen ist für Wechselstrom von der Periodenzahl 41,6 der scheinbare Widerstand zwischen den Klemmen A und C, wie wir berechnet haben, = 64,03 Ohm, weßhalb sich in diesem Falle nur die Stromstärke $\frac{100}{64{,}03} = 1{,}56$ Ampère ergeben kann.

Vergleicht man nun noch die Summe der Klemmenspannungen Δ_{AB} an den Klemmen A und B des Apparates I und Δ_{BC} an den Klemmen B und C des Apparates II, also die Summe $\Delta_{AB} + \Delta_{BC}$ mit der Spannung Δ_{AC} an den Klemmen A und C, zwischen denen die Apparate I und II hintereinander geschaltet sind, so ergibt sich für Gleichstrom (also ohne Selbstinduction)

$$\Delta_{AB} = 2 \times 30 = 60 \text{ Volt};$$
$$\Delta_{BC} = 2 \times 20 = 40 \text{ Volt};$$

folglich

$$\Delta_{AB} + \Delta_{BC} = 100 \text{ Volt} = \Delta_{AC},$$

also gleich der vorausgesetzten Klemmenspannung zwischen A und C. Dagegen erhält man für Wechselstrom wegen der Selbstinduction

$$\Delta_{AB} = 1{,}56 \times 31{,}62 = 49{,}38;$$
$$\Delta_{BC} = 1{,}56 \times 36{,}06 = 56{,}32;$$

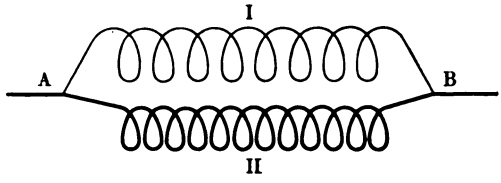
also

$$\Delta_{AB} + \Delta_{BC} \doteq 105{,}7,$$

also größer als $\Delta_{AC} = 100$.

Bei der in Fig 28 angedeuteten Parallelschaltung der beiden Leiter (oder Apparate) I und II, wobei wir in den Knotenpunkten A und B wieder eine

Fig. 28.



Klemmenspannung $\Delta_{AB} = 100$ Volt annehmen wollen, hat man die Zweigströme $i_1 = \frac{100}{31{,}62} \doteq 3{,}16$ Ampère und $i_2 = \frac{100}{36{,}06} = 2{,}77$ Ampère mit der Phasendifferenz

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 56^0\,19' - 18^0\,26' = 37^0\,53'$$

nach dem Theorem vom Kräftenparallelogramm zusammenzusetzen und erhält für den resultirenden Strom

$$J = \sqrt{3{,}16^2 + 2{,}77^2 + 2 \times 3{,}16 \times 2{,}77 \times \cos 37^0\,53'} \doteq 5{,}6 \text{ Ampère,}$$

entsprechend einem scheinbaren Widerstande des parallel geschalteten Systemes $= \frac{100}{5{,}6\ldots} \doteq 17{,}81$; während man für Gleichstrom den complexen Widerstand zwischen A und B, $\frac{30 \times 20}{30 + 20} = 12$ und somit den Strom $\frac{100}{12} = 8\,{}^1/_3$, bestehend aus den Zweigströmen $3\,{}^1/_3$ und 5, erhalten hätte.

Beim Wechselstrom ergibt sich also für parallel geschaltete Leiter die verkehrte Proportionalität der Zweigströme mit den *scheinbaren* Zweigwiderständen. Dies gilt für die effectiven und folglich auch für die Maximalwerthe der Stromintensitäten.

Condensator im Wechselstromkreise. In den vorhergehenden Para- 113
graphen haben wir gesehen, daß durch die Selbstinduction eine Verzögerung des Stromes gegen die Klemmenspannung bewirkt wird [1]). Das Gegentheil findet statt bei einem Condensator im Wechselstromkreise.

Da die Belegungen A und B des Condensators (siehe §. 35) durch ein isolirendes Diaphragma (Diëlectricum) getrennt sind, kann von einem Durchgange eines Stromes wie durch einen Leiter keine Rede sein. Doch tritt zwischen den beiden leitenden Enden A und B des unterbrochenen Stromkreises im Diëlectricum ein sogenannter Verschiebungsstrom [2]) auf, der auf die in der

[1]) Siehe insbesondere die Formeln 423 und 435.

[2]) Vergl. Ferraris, Wissenschaftliche Grundlagen der Electrotechnik, S. 262.

Anmerkung des §. 88 erklärte Art einen scheinbaren Stromdurchgang vermittelt.

Besitzt nun die an den Klemmen des Condensators wirkende electromotorische Kraft keinen constanten, sondern einen zwischen positiver und negativer Spannung alternirenden Werth, wie es bei einem Wechselstrome der Fall ist, so wird also auch der Condensator periodisch das Vorzeichen wechselnde Ladungen annehmen, und also auch der Wechselstrom durch diëlectrische Vermittelung scheinbar durchgelassen werden.

Es sei nun i die Intensität des augenblicklich gegen die Belegung A gerichteten Stromes, deren Ladung dadurch in einem Zeitelemente dt um die Electricitätsmenge $dq = idt$ zunimmt. Dabei wird auch das augenblickliche Ladungspotential v um den Betrag dv vermehrt. Da nun allgemein die Capacität des Condensators $C = \frac{q}{v}$ ist [1]), wenn q die augenblickliche Ladung bedeutet (Formel 87), so kann dq auch ausgedrückt werden durch Cdv und es besteht demnach die Gleichung $idt = Cdv$, also $i = C\frac{dv}{dt}$.

Geht man nun von der Annahme aus $v = \bar{v}\ sin\ wt$, also

$$\frac{dv}{dt} = \bar{v}w\ cos\ wt,$$

so erhält man für den Strom

$$i = C\bar{v}w\ cos\ wt = C\bar{v}w\ sin\left(wt + \frac{\pi}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 436)$$

oder $i = \bar{i}\ sin\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)$, wobei

$$\bar{i} = C\bar{v}w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 437)$$

Die Einführung der Effectivwerthe $i' = \frac{\bar{i}}{\sqrt{2}}$ und $v' = \frac{\bar{v}}{\sqrt{2}}$ gibt ebenso

$$i' = Cv'w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 438)$$

Aus der Gleichung $i = \bar{i}\ sin\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)$ geht hervor, daß der Ladestrom i für $t = 0$, für welche Zeit $v = \bar{v}\ sin\ wt$ gleich Null ist, sein Maximum erreicht, wie es dem Voreilen des Stromes um eine Viertelperiode entspricht.

Für den scheinbaren Widerstand des Condensators erhält man

$$\omega = \frac{v'}{i'} = \frac{1}{Cw} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 439)$$

[1]) Wir denken uns C in Farad, q in Coulomb und v in Volt ausgedrückt.

oder, wenn man die Capacität $C' = 10^6 C$ in Microfarad einführt

$$\omega = \frac{10^6}{C' w} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 440)$$

woraus man für $C' = 1$ und $w = 262$ (nämlich für die Frequenz 41,6), $\omega = 3817$, also nahezu 4000 Ohm erhält.

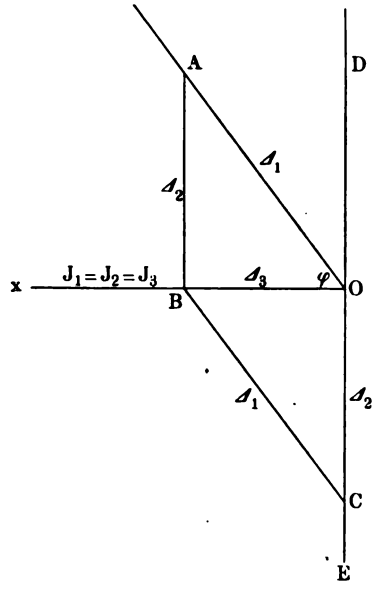
Denken wir uns in einem Wechselstromkreise die Leitung zwischen zwei Knotenpunkten A und B in die Zweige ACB und ALB gespalten, von denen der eine einen Condensator C und der andere einen mit Selbstinduction behafteten Leiter L (z. B. Drahtspule) enthält, so wird, wenn für die Klemmenspannung Δ in den Knotenpunkten A und B die Gleichung $\Delta = \overline{\Delta} \sin wt$ Geltung hat, der eine Zweig des Stromes J, entsprechend der Gleichung $J_1 = \overline{J_1} \sin\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)$, durch die Wirkung des Condensators in der Phase beschleunigt und der andere, entsprechend der Gleichung $J_2 = \overline{J_2} \sin(wt - \varphi)$, durch die Wirkung der Selbstinduction in der Phase verzögert sein. Die beiden Ströme gegeneinander werden also um $\frac{\pi}{2} + \varphi$ in der Phase differiren. Beträchtliche Phasendifferenzen zwischen zwei Zweigströmen können (auch ohne Condensator) schon dadurch hervorgebracht werden, daß man Zweigleitungen von sehr ungleicher Selbstinduction anwendet, was wegen der Schwierigkeiten, die mit der Herstellung und Anwendung geeigneter Condensatoren verbunden sind, gerne vorgezogen wird, wenn es sich um eine durch besondere Einrichtungen herbeizuführende Phasendifferenz („Kunstphase") für bestimmte Zwecke (z. B. rotirende Magnetfelder, „Drehfelder") handelt. Um gleich starke Zweigströme von beträchtlicher Phasendifferenz zu erhalten, gibt man z. B. dem einen Zweige große Selbstinduction bei kleinem Ohm'schen Widerstande und dem anderen Zweige kleine Selbstinduction bei großem Ohm'schen Widerstande (Tesla).

Capacität und Selbstinduction im Wechselstromkreise. Phasenrückverschiebung. Die Thatsache, daß durch Selbstinduction und Capacität Phasenverschiebungen zwischen Strom und Spannung in entgegengesetztem Sinne bewirkt werden (Formeln 435 und 436), legt die Frage nahe, unter welchen Bedingungen es möglich ist, eine durch Selbstinduction bewirkte Phasendifferenz zwischen Strom und Klemmenspannung durch die Einschaltnng eines Condensators in den Wechselstromkreis theilweise rückgängig zu machen oder ganz aufzuheben. Auf die allgemeine Lösung dieses Problemes der „Phasenrückverschiebung" soll hier nicht eingegangen werden[1]), sondern nur auf den 114

[1]) Ueber die allgemeinere Lösung des Problems der Rückverschiebung (die Phasendifferenz $= \varphi$ auf eine kleinere $= \psi$ zu reduciren) siehe J. Sahulka's

speciellen Fall, daß eine durch Selbstinduction, z. B. in einem Electromotor M, bewirkte Phasenverschiebung $= \varphi$ durch Serienschaltung (Fall 1) oder durch Parallelschaltung (Fall 2) mit einem Condensator K auf Null reducirt werden soll.

Fig. 29.



1. In Fig. 29 sei durch den Vector OA die Klemmenspannung Δ_1 des Motors vorgestellt, während der den Strom J_1 im Motor vorstellende Vector mit OA den Winkel φ im Sinne einer Verzögerung in der Phase einschließt, also in die Gerade Ox fällt[1]). Der die vor der Hand noch nicht bekannte Klemmenspannung Δ_2 des zuzuschaltenden Condensators vorstellende Vector wird dagegen in die Richtung OE fallen müssen, da der Strom dieser Klemmenspannung um $\frac{\pi}{2}$ voraus sein muß.

Fällt man nun aus A das Perpendikel AB auf Ox und zieht aus B die Parallele BC zu OA, so gibt die Strecke OC die Größe der Klemmenspannung Δ_2 am Condensator an und OB die Klemmenspannung Δ_3 an dem durch die Serienschaltung von M und K gebildeten Systeme, von welchen beiden Klemmenspannungen sofort ersichtlich ist, daß sie kleiner sind als die Δ_1 am Motor. Es ist nämlich

$$\Delta_2 = \Delta_1 \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 441)$$

$$\Delta_3 = \Delta_1 \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 442)$$

Um die zur vollständigen Phasenrückverschiebung ($\varphi = 0$, da nunmehr Strom und Spannung Δ_3 von gleicher Phase sind) erforderliche Capacität des Condensators zu finden, entnehmen wir zunächst aus der Formel 437

Abhandlung „Verwendung der Condensatoren im Wechselstrombetriebe". E. T. Z. 1893. (Wir behandeln hier nur den speciellen Fall $\psi = 0$, der in Sahulka's Abhandlung der allgemeinen Lösung vorausgeschickt ist.)

[1]) Wegen der Serienschaltung sind die Stromstärken J_1 im Motor, J_2 im Condensator und J_3 in dem aus M und K durch Hintereinanderschaltung gebildeten Systeme einander gleich und von gleicher Phase; ihr Zahlenwerth kommt hier nicht in Betracht und wird deßhalb im Diagramm nicht dargestellt. Die in diesem Paragraphen mit J und Δ bezeichneten und in den Figuren 29 und 30 durch Vectoren vorgestellten Größen sind Maximalwerthe.

$$C = \frac{J_2}{w\,\Delta_2} = \frac{J_1}{w\,\Delta_1 \sin\varphi}.$$

Führt man nun weiter den scheinbaren Widerstand $\frac{\Delta_1}{J_1} = R_1'$ des Motors und den inductiven Widerstand $R_1' \sin\varphi = wL$ ein, so erhält man

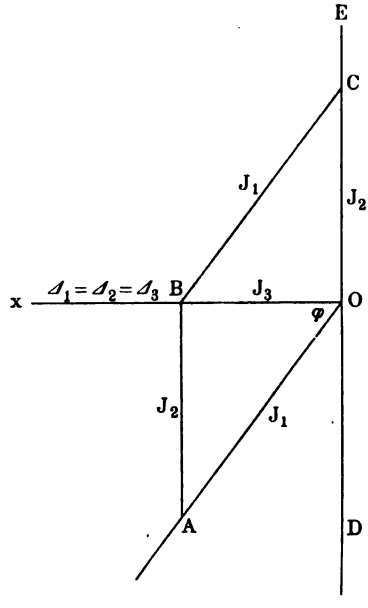
$$C = \frac{1}{w R_1' \sin\varphi} = \frac{1}{w^2 L}.$$

Wir wollen nun die Capacität des Condensators, der bei der Serienschaltung mit dem Motor die Phasendifferenz $\varphi = 0$ bewirkt, C_0' nennen und erhalten dann die Formel

$$C_0' = \frac{1}{w^2 L} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 443)$$

2. Die Rückverschiebung soll durch Parallelschaltung bewirkt werden. Die Klemmenspannung Δ_3 dieses Systems ist dann auch Klemmenspannung für den Motor (Δ_1) und für den Condensator (Δ_2). Wir nehmen an, daß der diese Klemmenspannungen $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$, die auch von gleicher Phase sind, darstellende Vector in unserem Diagramm (Fig. 30) die augenblickliche Lage Ox habe[1]). Der Strom J_1 im Motor, dargestellt durch den Vector OA, ist dieser für Motor und Condensator gemeinschaftlichen Klemmenspannung in der Phase um einen gewissen Betrag $AOx = \varphi$ zurück.

Fig. 30.



Fällt man nun auch hier (in analoger Weise wie vorhin) aus A das Perpendikel AB auf Ox und zieht parallel zu OA die Gerade BC, so gibt die Strecke OC die Stromstärke J_2 im Condensator und J_3 die Stromstärke im ganzen durch Parallelschaltung von K mit M gebildeten Systeme an, von welchen beiden Stromstärken sofort ersichtlich ist, daß sie kleiner sind als die Stromstärke J_1 im Motor vor der Parallelschaltung mit dem Condensator, nämlich

[1]) Die Größe der Klemmenspannung wird hier nicht in Betracht gezogen und deßhalb auch nicht durch einen Vector von bestimmter Länge dargestellt.

$$J_2 = J_1 \sin\varphi \quad \ldots \quad 444)$$

$$J_3 = J_1 \cos\varphi \quad \ldots \quad 445)$$

Aus der Formel 437 folgern wir auch hier die Capacität des Condensators, nämlich

$$C = \frac{J_2}{w\Delta_2} = \frac{J_1 \sin\varphi}{w\Delta_1} = \frac{\sin\varphi}{wR_1} = \frac{\sin^2\varphi}{w^2 L}.$$

Bezeichnet man also die Capacität, die bei Parallelschaltung mit dem Motor die Phasendifferenz zwischen Strom und Klemmenspannung aufhebt, mit C_0'', so gibt die Formel

$$C_0'' = \frac{\sin^2\varphi}{w^2 L} \quad \ldots \quad 446)$$

Die Vergleichung der Formeln 443 und 446

$$\frac{C_0''}{C_0'} = \sin^2\varphi \quad \ldots \quad 447)$$

lehrt, daß bei der Parallelschaltung eine kleinere Capacität zur Phasencompensation ausreicht [1]).

Bei beiden Schaltungen wird im Condensator, wegen der zwischen Strom und Spannung bestehenden Phasendifferenz vom Betrage $\frac{\pi}{2}$, keine Arbeit geleistet. Es muß also die Stromleistung $\frac{1}{2} J_3 \Delta_3 \cos 0 = \frac{1}{2} J_3 \Delta_3$ sowohl für das durch Serienschaltung als auch für das durch Parallelschaltung von M und K gebildete System denselben Werth haben, wie für M allein, nämlich

---

[1]) Die allgemeinere Lösung des Rückverschiebungsproblemes (siehe die vorhin citirte Abhandlung von Sahulka) lehrt folgendes. Soll die Phasendifferenz φ auf ψ, also um $\varphi - \psi = \delta$ reducirt werden, so ist dazu bei Serienschaltung die Capacität

$$C' = \frac{J_1}{w\Delta_1} \cdot \frac{\cos\psi}{\sin\delta} \quad \ldots \quad 448\,\text{I})$$

und bei Parallelschaltung die Capacität

$$C'' = \frac{J_1}{w\Delta_1} \cdot \frac{\sin\delta}{\cos\psi} \quad \ldots \quad 448\,\text{II})$$

erforderlich. Auch hieraus ergibt sich $\frac{C''}{C'} = \frac{\sin^2\delta}{\cos^2\psi}$, also für den Fall $\psi = 0$ und $\delta = \varphi$, $\frac{C''}{C'} = \sin^2\varphi$, wie in Formel 447.

Ein Wechselstromkabelnetz in Verbindung mit Transformatoren kann als eine Capacität in Parallelschaltung mit einer Selbstinduction angesehen werden. Diese Anordnung bringt es mit sich, daß die thatsächlich bestehende Phasendifferenz zwischen dem von den Sammelschienen abgehenden Wechselstrome und der an den Sammelschienen bestehenden Potentialdifferenz kleiner ist, als sie ohne die Capacität des Kabelnetzes sein würde.

$\frac{1}{2} J_1 \Delta_1 \cos\varphi$, was sich auch sofort ergibt, wenn man im ersten Falle $J_3 = J_1$ und $\Delta_3 = \Delta_1 \cos\varphi$, und im zweiten Falle $\Delta_3 = \Delta_1$ und $J_3 = J_1 \cos\varphi$ einsetzt [1]).

Electrische Schwingungen und Resonanz. Die zur Phasencompen- 115
sation durch Reihenschaltung mit der Selbstinduction erforderliche Capacität hat nach Formel 443 den Werth $\frac{1}{w^2 L}$, es besteht also, wenn wir die besagte Capacität C_0' jetzt einfach mit C bezeichnen, die Gleichung

$$Cw = \frac{1}{wL}$$

oder

$$\frac{1}{Cw} = wL \quad \ldots\ldots\ldots \quad 449\,\text{I})$$

woraus wir zunächst ersehen, daß in diesem Falle der scheinbare Widerstand $\omega = \frac{1}{Cw}$ des Condensators (Formel 439) dem inductiven Widerstande $l = wL$ (Formel 434) des mit der Selbstinduction L behafteten Apparates gleich ist.

Multiplicirt man in der Gleichung 449 I beiderseits mit dem Strommaximum $J = \bar{i}$, so erhält man

$$\frac{\bar{i}}{Cw} = wL\bar{i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 449\,\text{II})$$

woraus (nach den Formeln 437 und 421) hervorgeht, daß in diesem Falle auch der Maximalwerth $\bar{v} = \frac{\bar{i}}{Cw}$ der Potentialdifferenz am Condensator, und der Maximalwerth $\bar{\eta} = \bar{i} wL$ der electromotorischen Kraft der Selbstinduction einander gleich sind.

Endlich ergibt sich für diesen Fall aus $1 = w^2 CL$, da $w = \frac{2\pi}{T}$,

$$\left.\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{CL} \\ \frac{1}{T} = n &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{CL}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 450)$$

welche Gleichungen auch zur Berechnung der Frequenz dienen können, die bei gegebener Capacität und Selbstinduction die Phasencompensation mit sich bringt.

[1]) Siehe die im vorigen Paragraphen bereits citirte Abhandlung von J. Sahulka.

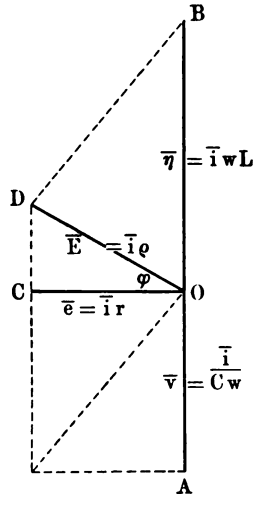
In einem Stromkreiſe, deſſen Selbſtinduction und Capacität einander aufheben, in dem alſo die Gleichung

$$n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

erfüllt iſt, und deſſen Ohm'ſcher Widerſtand ſehr klein iſt, können ſchon durch ſchwache electromotoriſche Kräfte beträchtliche Stromſtärken unterhalten werden, wie aus der folgenden Betrachtung hervorgeht.

In einem Wechſelſtromkreiſe, der eine Selbſtinduction L, eine Capacität C und einen Ohm'ſchen Widerſtand r enthält, ſei eine Klemmenſpannung E wirkſam, die den Strom i unterhält. In der Fig. 31 ſtellt der Vector OA die Potentialdifferenz $\bar{v} = \frac{\bar{i}}{Cw}$ an den Belegungen des Condenſators und der Vector OB die electromotoriſche Kraft $\bar{\eta} = \bar{i}wL$ der Selbſtinduction im Stromkreiſe vor. Von dieſen beiden Größen iſt $\bar{v}$ gegen den Strom $\bar{i}$ um $\frac{\pi}{2}$ in der Phaſe zurück, $\bar{\eta}$ dagegen um ebenſoviel voraus. Demnach fallen OA und OB in eine Gerade und eine in O darauf Senkrechte wird die Lage des die Stromſtärke $\bar{i}$ darſtellenden Vectors angeben. Wir wollen anſtatt $\bar{i}$ das Product $\bar{i}r = \bar{e}$, alſo den Vector des Spannungsverluſtes im Ohm'ſchen Widerſtande, auf dieſe Senkrechte auftragen und durch die Strecke OC darſtellen.

Fig. 31.



Setzt man nun die drei Componenten OA, OC und OB zu einer Reſultirenden OD zuſammen, ſo ſtellt dieſe die geſuchte, zur Unterhaltung des Stromes $\bar{i}$ erforderliche Klemmenſpannung oder electromotoriſche Kraft $\bar{E}$ vor, von der ſofort erſichtlich iſt, daß ſie dem Strome $\bar{i}$ im Allgemeinen um einen gewiſſen Betrag φ in der Phaſe voraus iſt. Dieſer Betrag ſtellt ſich als poſitiv, Null oder negativ heraus, je nachdem $\bar{\eta} \gtreqless \bar{v}$ iſt.

In dem Falle $\bar{\eta} = \bar{v}$ fällt OD mit OC zuſammen. Denkt man ſich nun den Ohm'ſchen Widerſtand r fortwährend verkleinert, ſo iſt klar, daß für $r = 0$ auch OC und OD Null würden, ohne daß deßhalb auch i und v verſchwinden müßten [1]).

[1]) Vergl. Ferraris, Wiſſenſchaftliche Grundlagen der Electrotechnik, S. 267.

Denken wir uns ein anderes Mal die electromotorische Kraft in dem Augenblicke, wenn der Condensator seine volle Ladung ($v = \bar{v}$) hat, plötzlich ausgeschaltet. Der Condensator wird sich nun entladen, aber der so entstehende Entladungsstrom wird Selbstinduction bewirken, indem er ein magnetisches Feld erzeugt. Gleichwie nun aber durch den Entladungsstrom das Magnetfeld erzeugt worden ist, so wird dann umgekehrt das wieder verschwindende Magnetfeld einen Strom von entgegengesetzter Richtung, also einen Ladungsstrom erzeugen, der eine der ursprünglichen gleichnamige Ladung des Condensators wieder herstellt[1]). Und zwischen den beiden gleichnamigen Ladungszuständen des Condensators wird ein entgegengesetzter Ladungszustand liegen, wie zwischen zwei gleichsinnigen Pendelausschlägen ein entgegengesetzter Ausschlag. So wird also die in dem beschriebenen Stromkreise einmal eingeleitete Electricitätsbewegung in der Form „electrischer Schwingungen" von der Periode $T = 2\pi\sqrt{CL}$ fortdauern, wobei ein periodischer Umsatz von electrischer in magnetische Energie und umgekehrt stattfindet, vergleichbar der Bewegung eines schwingenden Pendels, bei dem ein periodischer Umsatz von potentieller in kinetische Energie und umgekehrt stattfindet. Und gleichwie ein Pendel auch durch schwache periodische Impulse, deren Zeitintervall seiner Schwingungsdauer entspricht, allmählich zu starken Schwingungen gebracht werden kann, und wie eine ruhende Saite oder Stimmgabel durch das Tönen einer benachbarten gleichgestimmten Saite oder Stimmgabel zum Mittönen kommt, so summiren sich auch in einem Stromkreise mit Selbstinduction und Capacität, aber geringem Widerstande, schwache electromotorische Kräfte, die man mit der Frequenz $n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{CL}}$ auf den Stromkreis wirken läßt, und erzeugen darin electrische Schwingungen von derselben Periode. Man nennt deßhalb einen solchen Stromkreis (nach Hertz) einen electrischen Resonator. Durch Variation von L und C kann der Resonator für verschiedene Frequenzen empfänglich gemacht („abgestimmt") werden[2]).

Aus der Fig. 31 entnehmen wir noch Folgendes:

$(\bar{E})^2 = (\bar{e})^2 + (\bar{\eta} - \bar{v})^2$, woraus, wenn man die Werthe einsetzt und $(\bar{i})^2$ heraushebt, hervorgeht

$$(\bar{E})^2 = (\bar{i})^2 \left[r^2 + \left(wL - \frac{1}{Cw}\right)^2\right].$$

---

[1]) Näheres über die Bedingungen des Eintrittes und über die Fortdauer electrischer Schwingungen enthalten die Bemerkungen nach Formel 456 im §. 116.

[2]) Hierher gehören wohl auch die Versuche von Duddell mit Bogenlampen, bei denen der Lichtbogen mit einem electrischen Resonator parallel geschaltet war. E. T. Z. 1901, S. 513.

Führt man nun die Größe

$$wL - \frac{1}{Cw} = \lambda \quad \ldots \ldots \quad 451)$$

die man Reactanz genannt hat [1]), ein, so erscheint in dem Ausdrucke

$$\bar{i} = \frac{\bar{E}}{\sqrt{r^2 + \lambda^2}} \quad \ldots \ldots \quad 452)$$

die Größe

$$\varrho = \sqrt{r^2 + \lambda^2} \quad \ldots \ldots \quad 453)$$

als der scheinbare Widerstand des mit Ohm'schem Widerstande, Selbstinduction und Capacität behafteten Stromkreises.

116 **Zur Theorie der electrischen Schwingungen.** Ein Condensator von der Capacität C, dessen augenblickliche Potentialdifferenz an den Belegungen v heißen mag, entlade sich durch einen mit der Selbstinduction L behafteten Schließungsbogen vom Widerstande r. Dann wirkt der electromotorischen Kraft v die der Selbstinduction $\eta = -L\frac{di}{dt}$ entgegen und es ergibt sich nach dem Ohm'schen Gesetze die Stromstärke $i = \frac{v - \eta}{r}$. Es ist also $v = ir + \eta$ oder

$$v = ir + L\frac{di}{dt} \quad \ldots \ldots \quad 454)$$

Nennt man nun die augenblickliche Ladung des Condensators q, also $v = \frac{q}{C}$, und berücksichtigt man, daß diese Ladung durch den Entladungsstrom i in einem Zeitelemente dt um den Betrag dq vermindert wird, daß also $idt = -dq$, somit $i = -\frac{dq}{dt}$ und $\frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}$ zu setzen ist, so geht die vorstehende Gleichung über in $\frac{q}{C} = -r\frac{dq}{dt} - L\frac{d^2q}{dt^2}$ oder

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{CL} = 0 \quad \ldots \ldots \quad 455)$$

Die nähere Untersuchung dieser Gleichung, die der Differentialgleichung einer gedämpften schwingenden Bewegung entspricht [2]), führt zu dem Resultate, daß die Bewegung für den Fall $Cr^2 > 4L$ aperiodisch ist, also die Ausgleichung der Condensatorspannung in einer einmaligen Entladung erfolgt, daß

[1]) Vergl. Ferraris, l. c.
[2]) Wüllner, III. 1218 und 1308.

aber in dem Falle $Cr^2 < 4L$ eine schwingende Electricitätsbewegung der bereits beschriebenen Art von der Periode

$$T = \frac{2\pi\sqrt{CL}}{\sqrt{1 - \frac{Cr^2}{4L}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 456)$$

eintritt[1]), die ohne Ende andauern müßte, wenn $r = 0$ wäre und also kein Energieverlust durch Wärmeentwickelung im Ohm'schen Widerstande stattfände. Dieser Energieverlust durch Stromwärme vernichtet allmählich die abnehmenden electrischen Schwingungen, gleichwie Pendelschwingungen in Folge der Energieverluste durch die vorhandenen Bewegungshindernisse abnehmen und endlich aufhören müssen.

Ist r so klein, daß man $\frac{Cr^2}{4L}$ gegen 1 als verschwindend ansehen kann, so ergibt sich für die electrische Schwingungsdauer der für den electrischen Resonator aufgestellte Werth $T = 2\pi\sqrt{CL}$ (Formel 450). Bei den Resonatoren von Hertz war r sehr klein; aber auch das Product CL sehr klein, um eine sehr große Frequenz und für die Beobachtung entsprechend kleine Wellenlänge zu erzielen. Zur Erregung der electrischen Schwingungen diente die Inductionsspirale eines Funkeninductors, deren Capacität durch Verbindung der kugelförmigen Electroden mit Metallplatten von passender Oberfläche nach Erforderniß verändert werden konnte. Daß die Inductionsspirale eines Funkeninductors, ungeachtet ihres großen Widerstandes r, oscillatorische Entladungen gibt, beruht auf der sehr großen Selbstinduction L in dieser Spirale, wodurch der Werth von $\frac{Cr^2}{4L}$ unter 1 herabgedrückt wird, wie es für die Entstehung electrischer Schwingungen Bedingung ist[2]).

Auch von Leydener Flaschen erhält man bei passender Anordnung des

---

[1]) Man unterscheidet deßhalb aperiodische und oscillirende electrische Entladungen.

[2]) Als Capacität der geöffneten Inductionsspirale hat man die Electricitätsmenge anzusehen, die sich auf der Drahtoberfläche befindet, wenn an den Drahtenden (Electroden) die Potentialdifferenz $v = 1$ vorhanden ist. Auch hier gilt dann die Gleichung $v = ri + L\frac{di}{dt}$, aus der man, da $q = Cv$ und $i = -\frac{dq}{dt}$, somit $i = -C\frac{dv}{dt}$ ist, $v = -Cr\frac{dv}{dt} - LC\frac{d^2v}{dt^2}$ oder $\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{CL} = 0$ erhält, also wieder eine Differentialgleichung, die für $\frac{Cr^2}{4L} < 1$ auf abwechselnd positive und negative v von abnehmender Größe, also auf abnehmende electrische Schwingungen hinführt. (Siehe Wüllner, III, S. 1316.)

Versuches schwingende Entladungen, wie Feddersen mit einem rotirenden Spiegel zuerst nachgewiesen hat [1]).

117 **Oscillirende und rotirende Magnetfelder. Drehfeld. Drehstrom.** Jeder Wechselstrom erzeugt ein periodisches (schwingendes) Magnetfeld, ein sogenanntes Wechselfeld. Fließt z. B. ein Wechselstrom $i = \bar{i} \sin wt$ in einem Drahte von der Selbstinduction L, so ist die Zahl der erzeugten Kraftlinien $z = Li = L\bar{i} \sin wt$, also $z = \bar{z} \sin wt$, wenn man die dem Strommaximum $\bar{i}$ entsprechende Maximalzahl der Kraftlinien $L\bar{i} = \bar{z}$ setzt.

Durchfließt also ein Wechselstrom eine Drahtspule mit Eisenkern (wie z. B. bei einem Ringmagnet), so erzeugt er auch im Eisen ein Wechselfeld.

Das periodische Magnetfeld findet im Wechselstromumformer Anwendung, auf den wir später zurückkommen.

Ein rotirendes Magnetfeld oder Drehfeld einfachster Art entsteht aus der Zusammensetzung von zwei periodischen Magnetfeldern, die miteinander einen Winkel einschließen und eine Phasendifferenz haben.

Die ein magnetisches Drehfeld erzeugenden Wechselströme bilden ein System, das man als Drehstrom zu bezeichnen pflegt, und zwar als zwei- oder mehrphasigen Drehstrom, je nachdem zwei oder mehrere in der Phase differirende Wechselströme zur Erzeugung des Drehfeldes zusammenwirken [2]).

Das rotirende Drehfeld findet im Drehstrommotor Anwendung, dessen Princip an einem bekannten einfachen Experimente erklärt werden kann. Zwischen den Polen eines kräftigen Electromagneten rotire (z. B. durch Torsion des

---

[1]) Das Eintreten oscillatorischer Entladungen bei Leydener Flaschen steht mit dem Vorkommen negativer Rückstände auf der ursprünglich positiv geladenen inneren Belegung und auch damit im Zusammenhange, daß man beim Magnetisiren von Stahlnadeln durch den Entladungsstrom mitunter auch anomale Magnetisirungen (d. h. verkehrte Polarität) erhält. Ich habe bei meinen derartigen Versuchen stets nur normale Magnetisirungen erhalten, was auf dem Widerstande der von mir angewendeten Magnetisirungsspirale und der Zuleitungsdrähte beruhen dürfte, wodurch $\frac{Cr^2}{4L} > 1$ geworden ist.

[2]) Die schon sehr gebräuchlich gewordene Einschränkung des Namens „Drehstrom" auf das Dreiphasensystem ist ganz unbegründet und unwissenschaftlich. Mathematisch unrichtig ist auch die mehrfach aufgestellte Behauptung, daß nur der Dreiphasenstrom ein constantes Drehfeld erzeugen könne.

Damit soll nicht in Abrede gestellt sein, daß es in der practischen Ausführung leichter ist, mit einem Dreiphasensystem als mit einem Zweiphasensystem ein an Intensität und Bewegung hinreichend gleichförmiges Drehfeld herzustellen. Die mathematischen Bedingungen eines vollkommen constanten Drehfeldes lassen sich practisch nicht erfüllen, zumal bei der zur Verstärkung des Feldes erforderlichen Anwendung von Eisen. Periodische Unregelmäßigkeiten (Schwankungen, „Pulsiren") des rotirenden Feldes und unvollkommene Homogenität desselben sind also mehr oder weniger unvermeidlich.

Aufhängungsfadens dazu veranlaßt) eine kupferne Kugel. So wie man den magnetisirenden Strom schließt und somit die Kugel der Einwirkung eines kräftigen Magnetfeldes aussetzt, wird ihre Bewegung ersichtlich gehemmt, was auf der Wechselwirkung der in der rotirenden Kugel inducirten Ströme mit den Magnetpolen im Sinne des Lenzischen Gesetzes beruht. Würde man nun umgekehrt, während die Kugel ruhig am Faden hängt, den Electromagnet um eine mit dem Aufhängungsfaden der Kugel zusammenfallende verticale Axe rotiren lassen, hätte man also das Magnetfeld, in dem sich die Kugel befindet, in Rotation versetzt, so würde dadurch nunmehr die Kugel zu einer Drehung in gleicher Richtung angeregt werden. Die Rotationsgeschwindigkeit der Kugel müßte aber stets kleiner bleiben als die des Magnetfeldes, denn bei gleicher Geschwindigkeit, also relativer Ruhe zwischen Kugel und Magnetfeld, wäre keine Veranlassung mehr zur Induction von Strömen in der Kugel vorhanden, damit haben wir auch zugleich das Princip der sogenannten asynchronen Bewegung eines Leiters im magnetischen Drehfelde ausgesprochen [1]).

Wäre der im Drehfelde befindliche Leiter zugleich magnetisch (wie z. B. ein an einem Faden hängendes oder auf einer Spitze drehbares Magnetstäbchen), so würde er stets das Bestreben haben, sich mit seiner magnetischen Axe in die Richtung des Magnetfeldes einzustellen. Wegen der vorhandenen Bewegungshindernisse würde zwar die Axenrichtung hinter der Feldrichtung um einen gewissen Winkel zurückbleiben, die Winkelgeschwindigkeit des Magneten würde aber die des Drehfeldes erreichen müssen. Ein Magnet im magnetischen Drehfelde nimmt also eine synchrone Bewegung an. Bevor diese eintritt, also beim „Angehen", wird auch in der leitenden Masse des Magneten die bei der asynchronen Bewegung besprochene electrodynamische Wirkung stattfinden [2]).

Magnetische Drehfelder könnten keine practische Bedeutung haben, wenn sie nur durch die Bewegung schwerer Magnete hervorzubringen wären. Wir verdanken aber einer im Jahre 1888 publicirten (aber schon einige Jahre früher gemachten) großen Entdeckung von G. Ferraris die Möglichkeit, magnetische Drehfelder in der mannichfachsten Weise durch das Zusammenwirken von in der Phase verschobenen Wechselströmen verhältnißmäßig leicht und einfach hervorzubringen.

---

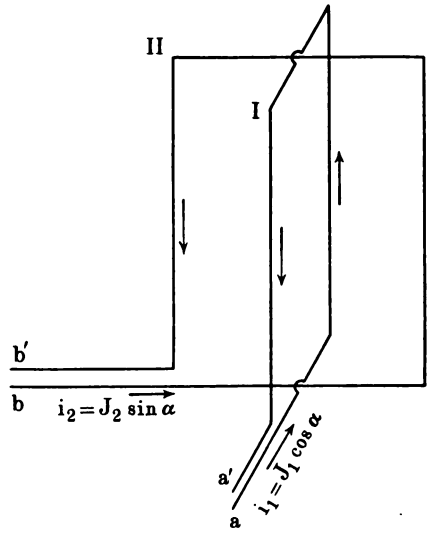
[1]) Die Wirkung kann durch zweckdienliche Construction des rotirenden Theiles, des sogenannten Läufers, verstärkt werden, wenn man nämlich anstatt eines beliebigen Leiters einen sogenannten Kurzschlußanker (ähnlich einem Trommelanker mit geschlossener Wickelung) anwendet, worauf wir am Schusse des §. 119 zurückkommen.

[2]) Diese Wirkung wird, wenn ein Electromagnet als Läufer dient, durch die beim Angehen kurz geschlossene und durch inducirte Ströme magnetisirend wirkende Wickelung verstärkt. Sobald die synchrone Bewegung nahezu erreicht ist, wird der Electromagnet durch einen von außen zugeführten Gleichstrom erregt. [Tesla-Motor; siehe J. Sahulka, Ueber Wechselstrommotoren (1892), S. 17.]

Dabei wird ſtets angeſtrebt, daß die periodiſchen Magnetfelder, die das Drehfeld geben ſollen, ſo beſchaffen und angeordnet ſeien, daß ein mit conſtanter Winkelgeſchwindigkeit rotirendes Drehfeld von conſtanter Intenſität entſteht.

Bevor wir auf die Unterſcheidung der verſchiedenen Syſteme, die hier in Betracht kommen, eingehen, möge der Fundamentalverſuch kurz erwähnt werden, mit dem Ferraris die Entſtehung eines magnetiſchen Drehfeldes in der einfachſten Form zuerſt dargethan hat.

Fig. 32.



Das Princip dieſes Experimentes beſteht in der Anwendung von zwei weiten Drahtgewinden I und II (Fig. 32) in gekreuzter Stellung, durchfloſſen von Wechſelſtrömen i_1 und i_2 von gleicher Periode, aber verſchiedener Phaſe. Innerhalb der ſich kreuzenden Drahtgewinde entſteht dann ein Drehfeld.

Soll dieſes Drehfeld conſtant ſein und gleichförmig rotiren, ſo kann dies durch die Erfüllung von Bedingungen erzielt werden, analog jenen, die zutreffen müſſen, wenn aus der Zuſammenſetzung von zwei geradlinigen Schwingungscomponenten eine gleichförmige Kreisbewegung reſultiren ſoll[1]). Das verlangte Drehfeld würde alſo z. B. zu Stande kommen,

[1]) Dieſe Bedingungen werden faſt immer ſo ausgeſprochen, daß die beiden Schwingungscomponenten von gleicher Periode ſein, gleiche Amplituden haben, einen rechten Winkel miteinander einſchließen und mit einer Phaſendifferenz von einer Viertelperiode zuſammenwirken müſſen.

Eine allgemeinere Löſung aber iſt die, daß die Schwingungscomponenten von gleicher Periode und Amplitude, wenn ſie mit der Phaſendifferenz φ behaftet ſind, den Componentenwinkel $180^0 - \varphi$ miteinander einſchließen müſſen. Es entſteht dann eine gleichförmige Kreisbewegung vom Radius $a \sin \varphi$, wenn a die Amplitude der geradlinien Schwingungscomponenten iſt. Es entſteht alſo z. B. auch eine gleichförmige Kreisbewegung, wenn die gleichperiodiſchen und gleichſtarken Schwingungscomponenten bei einer Phaſendifferenz von $\frac{1}{6}$ Periode oder von 60 Graden einen Componentenwinkel von 120 Graden miteinander einſchließen. Der Radius der Kreisbewegung iſt dann $= a \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$. [Siehe Sahulka, Ueber Wechſelſtrommotoren (1892), S. 14.]

wenn zwei gleichperiodische und gleichstarke homogene Wechselfelder unter einem rechten Winkel und mit der Phasendifferenz einer Viertelperiode zusammen wirken.

Um der Erfüllung dieser Bedingungen nahe zu kommen, läßt man also die beiden mit gleich vielen Windungen versehenen Drahtgewinde I und II (Fig. 32) einander senkrecht durchkreuzen und von zwei gleichstarken, in der Phase um eine Viertelperiode differirenden Wechselströmen durchflossen werden [1]). Es entsteht dann ein gleichförmig rotirendes constantes Drehfeld [2]), dessen Bewegung man sich auch in folgender Weise vorstellen kann.

Ist der Strom i_1 im Maximum ($i_1 = J_1$) und somit der Strom $i_2 = 0$, so ist das Gewinde I von einem Magnetfelde senkrecht durchsetzt, dessen Kraftlinien parallel zur Zeichnungsebene von links nach rechts verlaufen, während das Gewinde II stromlos ist. Im nächsten Augenblicke hat das Magnetfeld I etwas abgenommen, dagegen ist ein Magnetfeld II aufgetreten, das von senkrecht aus der Zeichnungsebene heraustretenden, vom Strome i_2 erzeugten Kraftlinien gebildet wird. Und während im weiteren Verlaufe das Magnetfeld I fortwährend abnimmt, nimmt das Feld II fortwährend zu, und nach Ablauf einer Viertelperiode ist das Magnetfeld I Null geworden, während II seinen Maximalwerth (den vor einer Viertelperiode I hatte) erreicht hat. Es hat sich also eine Aenderung in Intensität und Richtung des magnetischen Feldes vollzogen, die nach Ablauf einer Viertelperiode einer Drehung des Feldes um einen Quadranten äquivalent ist. Nach einer halben Periode hat das Feld I seinen negativen Maximalwerth, während II wieder Null ist, das Feld hat sich also um 180 Grade gedreht u. s. w.

---

[1]) Solche Ströme können durch Abzweigung von vier um je 90° voneinander abstehenden Punkten eines Gramme'schen Ringes, die man mit vier an der Axe der Dynamomaschine angebrachten Schleifringen verbunden hat, leicht erhalten werden. Wenn es nicht gerade auf genaue Verhältnisse ankommt, also z. B. nicht auf eine volle Viertelperiode Phasenunterschied, kann die Rotation eines Läufers im Ferraris'schen Drehfelde auch durch eine sogenannte Kunstphase in der Art bewirkt werden, daß man durch die Drahtgewinde gleichstarke Zweige eines Wechselstromes gehen läßt, deren einen man durch Einschaltung eines inductiven Widerstandes verzögert hat, während der andere durch inductionsfreie Widerstände (z. B. Glühlampen) geht. (Ueber die Abzweigung vom Gramme-Ringe siehe Förderreuther, Frankfurter Congreßbericht 1891, S. 138.)

Bemerkenswerth ist, daß wir die durch bewunderungswürdige Einfachheit ausgezeichnete Grundform des Apparates von Ferraris an einem Motor der Allgemeinen Electricitäts-Gesellschaft (siehe Sahulka, l. c., S. 16) im Großen ausgeführt finden, bei dem die in Fig. 32 dargestellten verticalen Leiter durch vier dicke Kupferstäbe gebildet werden, die die Wand des „Ständers", nämlich eines eisernen Hohlcylinders, parallel zu dessen Axe durchsetzen und deren Enden beiderseits leitend miteinander verbunden sind.

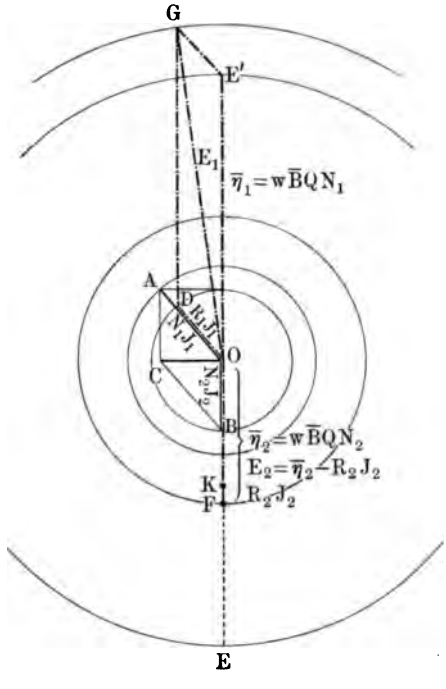
[2]) Diese constante Intensität des Drehfeldes ist gleich der Amplitude a der Componenten.

Die beschriebene Drehung erfolgt hier im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers. Die Umkehrung der Richtung eines der beiden Ströme bewirkt auch die Umkehrung der Rotationsrichtung des magnetischen Feldes.

Befindet sich nun in dem Magnetfelde in centrirter Stellung ein um eine verticale Axe leicht beweglicher Leiter, z. B. kupferner Cylinder oder Trommelanker mit geschlossener Bewickelung, oder ein Magnet, so eignet sich der beschriebene Apparat zur Demonstration einer durch ein magnetisches Drehfeld bewirkten asynchronen oder synchronen Rotationsbewegung, also des Principes der Drehstrommotoren, auf die wir später noch zurückkommen.

118 **Wechselstromumformer. Transformator.** Schickt man durch die Bewickelung eines polloſen[1]) Ringmagneten einen Wechselstrom, so entsteht ein periodisches Magnetfeld, dessen Kraftlinien, wie wir annehmen können, durchwegs im Eisenkern verlaufen. Ist die besagte Bewickelung, die wir nunmehr die primäre nennen wollen, von einer zweiten, die man die secundäre nennt, umgeben, so wird in dieser, sobald sie geschlossen wird, ein inducirter Strom auftreten, denn die Kraftlinien des Wechselfeldes durchsetzen die Windungen nicht nur der primären, sondern auch die der secundären Bewickelung. Zugleich ist das Schließen der secundären Bewickelung von einer Zunahme des Stromes in der primären Bewickelung begleitet.

Fig. 33.



Betrachten wir nun den eingetretenen stationären Zustand, so haben wir einen Wechselstrom J_1 in den N_1 Windungen der primären und einen Wechselstrom J_2 in den N_2 Windungen der secundären Bewickelung. Es wirken also

[1]) Der polloſe Zustand wird durch vollständige und gleichmäßige Bewickelung des Ringeisens erzielt, während der Faraday'sche Ring nur theilweise primär und secundär bewickelt war. Die Transformatoren von Zipernowsky, Déri und Bláthy haben polloſe, magnetisch geschlossene Kerne von untertheiltem Eisen.

zweierlei Stromwindungen $N_1 J_1$ und $N_2 J_2$ magnetisirend auf den Eisenkern, jedoch nicht mit ihrer Summe, sondern wegen der zwischen J_1 und J_2 bestehenden Phasendifferenz $A\,O\,B$ (Fig. 33) mit einem geringeren Betrage, der durch die Diagonale $O\,C$ des aus $O\,A = N_1 J_1$ und $O\,B = N_2 J_2$ unter dem Componentenwinkel $A\,O\,B$ construirten Parallelogrammes vorgestellt wird. Drückt man die so resultirende Zahl der äquivalenten Stromwindungen ebenfalls in der Form eines Productes

$$NJ = \sqrt{(\overline{N_1 J_1}^2 + \overline{N_2 J_2}^2 + 2\,N_1 J_1 \times N_2 J_2 \cos A\,O\,B)}$$

aus, so erhält man nach §. 77, Formel 211, für die Zahl der durch NJ erregten Kraftlinien im Eisenkern $\bar{z} = \dfrac{4\,\pi\,NJ}{l} \cdot \mu\,Q$, wobei Q den (als constant vorausgesetzten) Querschnitt des Eisenkernes und l die mittlere Länge des Kraftlinienweges im Eisenkern von der Permeabilität μ bedeutet. Da J_1 und J_2, wie wir im Sinne der Zeichnung voraussetzen, Maximalwerthe sind, so ist auch die soeben berechnete Kraftlinienzahl $\bar{z}$ ein Maximalwerth und folglich auch die entsprechende Kraftliniendichte $\overline{B} = \dfrac{4\,\pi\,NJ\,\mu}{l}$. Für $\bar{z} = \overline{B}\,Q$ ergibt sich nun die Gleichung des der Zeit t entsprechenden Momentanwerthes z des Wechselfeldes in der Form $z = \bar{z}\,\sin wt = \overline{B}\,Q\,\sin wt$, wenn man, wie die Fig. 33 andeutet, von $i = J\,\sin wt$ ausgeht.

Das beschriebene Wechselfeld inducirt nun electromotorische Kräfte in beiden Bewickelungen. Für die N_1 Windungen der primären Bewickelung erhält man

$$\eta_1 = \left(-\frac{dz}{dt}\right) N_1 = -w\overline{B}\,Q_1 N_1 \cos wt = w\overline{B}\,Q\,N_1 \sin\left(wt - \frac{\pi}{2}\right).$$

Diese electromotorische Kraft, deren Maximalwerth $\eta_1 = w\overline{B}\,Q\,N_1$, ist also in der Phase um $\dfrac{\pi}{2}$ hinter $O\,C$ zurück. Sie muß von der Klemmenspannung E_1 an der primären Bewickelung aufgehoben werden (wie wir es im §. 109 hinsichtlich der electromotorischen Kraft der Selbstinduction dargethan haben) und wir haben deßhalb in der Zeichnung den die Größe $\overline{\eta}_1$ vorstellenden Vector in entgegengesetzter Lage als Componente $O\,E$ der primären Klemmenspannung $O\,G = E_1$ aufgetragen. Als zweite Componente dieser Klemmenspannung erscheint der in der Zeichnung durch $O\,D$ dargestellte Spannungsverlust $R_1 J_1$ im Ohm'schen Widerstande R_1 der primären Bewickelung.

Die vom betrachteten Wechselfelde in der secundären Bewickelung inducirte electromotorische Kraft

$$\eta_2 = \left(-\frac{dz}{dt}\right) N_2 = -w\overline{B}\,Q\,N_2 \cos wt = w\overline{B}\,Q\,N_2 \sin\left(wt - \frac{\pi}{2}\right)$$

steht in der Phase gleichfalls um $\frac{\pi}{2}$ hinter OC zurück und ihr Maximalwerth $\overline{\ }_2 = w\overline{B}QN_2$ ist in der Fig. 33 durch den Vector OF vorgestellt. — Wenn im secundären Stromkreise, wie wir hier voraussetzen wollen, nur geringe Selbstinduction vorhanden ist[1]), werden J_2 (im Vector $OB = N_2 J_2$ liegend) und $\overline{\eta}_2 = OF$ in der Phase nahe zusammenfallen, somit auch der Spannungsverlust $R_2 J_2$ in der secundären Bewickelung. Wir werden also den die secundäre Klemmenspannung E_2 darstellenden Vector OK erhalten, wenn wir den die electromotorische Kraft $\overline{\eta}_2$ darstellenden Vector OF um eine Strecke $KF = R_2 J_2$ verkürzen.

Durch Einsetzen des Werthes $w = 2\pi n$, wobei n wieder die Periodenzahl bedeutet, erhält man

$$\overline{\eta}_1 = 2\pi n \overline{B} Q N_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 457)$$

$$\overline{\eta}_2 = 2\pi n \overline{B} Q N_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 458)$$

für die Maximalwerthe der η in absoluten Einheiten. Um die effectiven Mittelwerthe in Volt zu erhalten, hat man durch $\sqrt{2}$ und überdies durch 10^8 zu dividiren und erhält, indem man annähernd $\frac{2\pi}{\sqrt{2}} = 4{,}44$ annimmt,

$$\eta_1' = 4{,}44\, n \overline{B} Q N_1 \,.\, 10^{-8} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 459)$$

$$\eta_2' = 4{,}44\, n \overline{B} Q N_2 \,.\, 10^{-8} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 460)$$

Da die Spannungsverluste in den Bewickelungen verhältnißmäßig klein sind, werden diese Größen auch den Klemmenspannungen e_1' und e_2 nahezu gleichkommen.

Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$p = \frac{\eta_1'}{\eta_2'} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{e_1'}{e_2'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 461)$$

Man nennt diese Zahl das Transformationsverhältniß; sie läßt erkennen, daß man eine gegebene primäre Klemmenspannung auf eine p mal niedrigere secundäre bringen kann, wenn man der secundären Bewickelung p mal weniger Windungen gibt, als der primären. Dabei werden die Stromstärken (abgesehen von den kleinen Energieverlusten) im verkehrten Verhältnisse mit den Windungszahlen stehen müssen.

Setzen wir auch für die Klemmenspannungen und Stromstärken die effectiven Mittelwerthe e_1', e_2' und i_1', i_2' und bezeichnen wir die Phasendifferenzen

[1]) Beim Glühlichtbetriebe können wir die Verbrauchsstellen im äußeren Stromkreise der secundären Bewickelung als nahezu inductionsfrei ansehen und also mit Rücksicht auf die verhältnißmäßig geringe Windungszahl dieser zweiten Bewickelung wohl diese Annahme gelten lassen.

zwischen e_1' und i_1' mit φ_1, und zwischen e_2' und i_2' mit φ_2, so wird wegen der Verluste durch Hysteresis und Stromwärme (mit Einschluß der Wirbelströme) der an den Klemmen der secundären Wickelung abgegebene mit dem Wattmeter gemessene Effect $e_2' i_2' \cdot \cos \varphi_2$ kleiner sein müssen, als der an den Klemmen der primären Wickelung aufgenommene $e_1' i_1' \cos \varphi_1$, und man hat das Verhältniß

$$f = \frac{e_2' i_2' \cdot \cos \varphi_2}{e_1' i_1' \cdot \cos \varphi_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 462)$$

den physicalischen Wirkungsgrad[1]) des Transformators genannt.

Hat die secundäre Bewickelung nur wenige Windungen und im äußeren Stromkreise fast nur inductionsfreie Widerstände (Glühlampen), so kann man φ_2 nahezu $= 0$ annehmen und $f = \frac{e_2' i_2'}{e_1' i_1' \cos \varphi_1}$ setzen. Man kann dann den secundären Effect auch durch Einzelmessung von e_2' und i_2' ermitteln. Uebrigens wird in diesem Falle auch φ_1 sehr klein sein.

Wenn die secundäre Wickelung offen oder mit einem sehr großen Widerstande geschlossen ist, nimmt die primäre Wickelung nur einen sehr schwachen Strom auf[2]); dabei ist[3]) die Phasendifferenz zwischen E_1 und J_1, sowie auch jene zwischen J_1 und J_2 nahezu eine Viertelperiode. Wird der secundäre Stromkreis geschlossen, also der Transformator, wie man sagt, „belastet", so nimmt der inductive Widerstand in der primären Wickelung ab[4]) und in Folge dessen die primäre Stromstärke zu; in beiden Stromkreisen wächst die Stromstärke mit zunehmender Belastung, während gleichzeitig die Phasendifferenz zwischen

---

[1]) Die besagten Verluste betragen bei guten Transformatoren nur wenige Procente. Der sogenannte Jahreswirkungsgrad ist

$$F = \frac{P S_1}{P S_1 + \frac{P p}{100} S_1 + 8760 \frac{P p_0}{100}} = \frac{S_1}{S_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) + 87{,}6\, p_0} \quad \ldots \quad 463)$$

Dabei bedeutet P die Leistungsfähigkeit des Transformators in Watt, ferner $S_1 = \frac{\text{Wattstunden im Jahr}}{P}$ die Zahl der Stunden, die erforderlich wären, um den Jahresconsum bei Vollbelastung zu bestreiten, p die Stromwärmeverlustprocente, p_0 die Hysteresisverlustprocente und $8760 = 365 \times 24$ die Zahl der Stunden im Jahre. — Z. B. für $S_1 = 500$, $p = 2$ und $p_0 = 3$ wäre der Jahreswirkungsgrad $= \frac{500}{500\left(1 + \frac{2}{100}\right) + 87{,}6 \times 3} = 0{,}647$, also nahezu 65 Proc.

[2]) Was wegen Herabsetzung der Verluste durch Stromwärme in dem fortwährend „unter Strom" stehenden Transformator öconomisch vortheilhaft ist.

[3]) Abgesehen vom Einfluß der Wirbelströme, deren Berücksichtigung uns zu weit führen würde.

[4]) Näheres hierüber findet man in Riecke's Lehrbuch der Experimentalphysik (1896), S. 262.

E_1 und J_1 abnimmt und somit jene zwischen J_1 und J_2 zunimmt. Bei Vollbelastung besteht zwischen der primären Klemmenspannung und Stromstärke nur eine sehr kleine Phasendifferenz, während der primäre und secundäre Strom fast um eine halbe Periode in der Phase auseinander sind. Die damit verbundenen Aenderungen in der Größe und Lage der Vectoren $OA = N_1 J_1$ und $OB = N_2 J_2$ gehen dabei stets in der Art vor sich, daß die durch den Vector OC vorgestellte Zahl der resultirenden Stromwindungen NJ, folglich auch die Feldstärke $\overline{B}$ im Eisenkern unverändert bleibt, wodurch auch die Nutzspannung (secundäre Klemmenspannung) bei allen Belastungsänderungen merklich constant erhalten wird. Darin besteht die sogenannte Selbstregulirung des Transformators.

Daß man mit dem Transformator ebensogut niedrigere Spannungen in höhere transformiren kann wie umgekehrt, ist selbstverständlich. Dem ersteren Zwecke dient schon lange der Rühmkorff'sche Funkeninductor.

Bei Kraftübertragungen auf sehr große Entfernungen wird an der Erzeugungsstelle die Spannung des Generators nach aufwärts transformirt, um hochgespannten Strom von entsprechend geringer Stärke in die Leitung zu bringen, falls nicht schon der Generator selbst hinreichend hochgespannte Ströme liefert, und an der Verbrauchsstelle wird wieder auf die erforderliche Nutzspannung herabtransformirt und dabei ein im gleichen Verhältnisse stärkerer Nutzstrom gewonnen.

Ein Transformator ist seiner Dynamomaschine mit abgesonderter Erregung vergleichbar. Die primäre Bewickelung mit dem Eisenkern entspricht dem Feldmagnet, die secundäre Bewickelung mit dem Eisenkern dem Anker. Während dieser bei der Dynamomaschine in einem stehenden Magnetfelde rotirt, wirkt beim Transformator das oscillirende Magnetfeld in einem stehenden Eisenkern.

Die Analogie geht noch weiter, wie die nachstehende Erwägung zeigt.

Aus der Formel 460, nämlich $\eta_2' = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \overline{B} Q N_2$, erhält man mit Rücksicht auf die Formel 417 den Mittelwerth der electromotorischen Kraft

$$\bar{e}_2 = 4 n \overline{B} Q N_2 \times 10^{-8} \quad \text{oder} \quad \bar{e}_2 = 4 \frac{Z N_2 v}{6 . 10^9},$$

wenn man die maximale Gesammtzahl der den Eisenkern durchsetzenden Kraftlinien $\overline{B} Q = Z$ und die Periodenzahl pro Minute $60 n = v$ setzt. Man sieht, daß die erhaltene Formel jener für die mittlere electromotorische Kraft $e = \frac{Z N v}{6 . 10^9}$ einer Dynamomaschine analog ist, wobei Z die Gesammtzahl

der das Ankereisen durchsetzenden Kraftlinien, N die Zahl der Ankerdrähte und v die Tourenzahl pro Minute bedeutet [1]).

Schließlich bemerken wir noch folgendes. Für jede der beiden Bewickelungen eines Transformators stellt die Größe

$$\varepsilon = \frac{\eta'}{Q\,N} = 4{,}44\,n\,\overline{B}\,.\,10^{-8}\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 464)$$

die in einer Windung erregte electromotorische Kraft für 1 cm² des Eisenquerschnittes vor und diese Größe ist bestimmt durch die Periodenzahl und das Maximum der magnetischen Induction im Eisenkern. Diese letztere läßt man aus practischen Gründen mit der Leistungsfähigkeit der Transformatoren langsam abnehmen, worauf jedoch hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Drehstrommotoren. Es kann nicht die Aufgabe dieses Buches sein, in **119** eine Besprechung der überaus zahlreichen Constructionen von Motoren dieser Art einzugehen oder auch nur einige der wichtigsten davon zu beschreiben. Nur allgemeine principielle Bemerkungen können hier Platz finden, die sich, im Anschlusse an das im §. 117 bereits Gesagte, theils auf die Eintheilung und theils auf die Schaltung der Drehstrommotoren beziehen mögen.

In ersterer Hinsicht ist die Eintheilung in asynchrone und synchrone Motoren im §. 117 bereits erklärt und begründet worden.

Anderseits besteht die Eintheilung in zwei- und mehrphasige Drehstrommotoren [2]), eine Eintheilung, die sich auf die Anzahl der das Drehfeld erzeugenden Wechselströme bezieht. Der im §. 117 beschriebene Apparat von Ferraris ist uns ein Beispiel eines zweiphasigen Motors. Würde man aber statt zweier rechtwinkelig sich kreuzender Drahtgewinde von gleicher Windungszahl deren drei anwenden, deren Stromzuführungen [3]) um je 120 Grade im Azimuthe auseinanderliegen und in die man die gleichperiodischen Wechselströme $i_1 = J\sin\alpha$, $i_2 = J\sin(\alpha - 120)$ und $i_3 = J\sin(\alpha - 240)$ von gleicher Amplitude J eintreten läßt, so würde man ein dreiphasiges constantes Drehfeld von gleichförmiger Bewegung erhalten, also einen Apparat, der mit einem Läufer versehen, die einfachste Type eines Dreiphasenmotors darstellen würde [4]).

---

[1]) Siehe die Formel 119, in der übrigens die Tourenzahl pro Minute mit n bezeichnet ist.

[2]) Die älteren einphasigen Wechselstrommotoren bleiben, da sie kein Drehfeld besitzen, hier außer Betracht.

[3]) Die beiden Stromzuführungen a und b in Fig. 32 liegen im Azimuthe um 90 Grade auseinander.

[4]) Der zum Betriebe erforderliche Dreiphasenstrom könnte hier ebenfalls durch Abzweigungen von einem Gramme'schen Ringe erhalten werden, indem man sechs um je 60° voneinander abstehende Punkte desselben mit sechs Schleifringen verbindet,

Ein Motor kann endlich auch so beschaffen sein, daß darin nicht nur ein, sondern mehrere Drehfelder gleichzeitig rotiren, weßhalb man auch Motoren mit einfachem und mit mehrfachem Drehfelde unterscheidet. Wir kommen am Schlusse dieses Paragraphen darauf zurück.

Hinsichtlich der Schaltung bemerken wir folgendes.

Wird beim Zweiphasenstrom eine gemeinschaftliche Rückleitung [1]) für beide Wechselstromkreise angewendet, so hat diese den Summenstrom $J \sin \alpha + J \cos \alpha$ zu führen, dessen Maximalwerth

$$J(\sin 45^0 + \cos 45^0) = J \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot J = 1{,}414 \, . \, J$$

ist. Der Querschnitt der gemeinschaftlichen Rückleitung muß also das $\sqrt{2}$fache vom Querschnitte einer der Zuleitungen sein. Man bezeichnet ein solches System von Leitungen als verketteten Zweiphasenstrom.

Eine sehr wesentliche und practisch belangreiche Vereinfachung ergibt sich beim Dreiphasensystem. Denkt man sich nämlich bei dem vorhin beschriebenen Modell eines Dreiphasenmotors die drei „Rückleitungen“ [2]) in eine einzige Leitung zusammengefaßt, so hätte diese die Ströme $i_1 = J \sin \alpha$, $i_2 = J \sin (\alpha - 120^0)$ und $i_3 = J \sin (\alpha - 240^0)$ zu führen, deren Summe Null ist, nämlich

$$i_1 + i_2 + i_3 = J[\sin \alpha + \sin (\alpha - 120) + \sin (\alpha - 240)]$$
$$= J\left[\sin \alpha \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \cos \alpha \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = 0 \; . \; . \; 465).$$

Hieraus geht hervor, daß diese gemeinschaftliche Rückleitung, da sie (stets unter der Voraussetzung gleichstarker Phasenströme [3]) ohnedies stromlos wäre, überhaupt entbehrlich ist, und daß daher der Dreiphasenstrom auf drei Leitungen beschränkt werden kann, wie z. B. aus der Fig. 34 ersichtlich ist. Hier stellen I, II und III die Spulen des dreiphasigen Stromerzeugers vor, aus denen die Ströme $i_1 = J \sin \alpha$, $i_2 = J \sin (\alpha - 120)$ und $i_3 = J \sin (\alpha - 240)$ hervorgehen, während T, T' u. s. w. dreiphasige Motoren (oder auch die Primärwickelungen von dreiphasigen Transformatoren), die an die Außen-

---

eine Schaltung, die sich vermöge einer später zur Sprache kommenden Beziehung zwischen den Strömen eines Dreiphasensystemes (Formel 465) auf drei Abzweigungspunkte mit drei Schleifringen einschränken läßt.

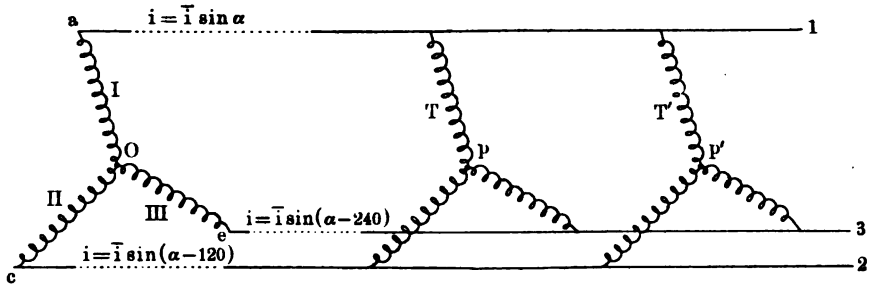
[1]) a' und b' in Fig. 32. Siehe die nächste Anmerkung. Die in der Figur mit J_1 und J_2 bezeichneten Maximalwerthe der beiden Ströme sind in dem hier betrachteten Zweiphasensysteme einander gleich, nämlich $J_1 = J_2 = J$.

[2]) Als Rückleitung (z. B. a' und b' in Fig. 32) bezeichnen wir bei Wechselströmen eine Leitung, in der ein Strom, wenn er sich in seiner positiven Phase befindet, vom betrachteten Apparate abfließt.

[3]) Phasenströme nennen wir die zur Erzeugung eines magnetischen Drehfeldes in der Phase gegeneinander verschobenen Wechselströme.

leiter L_1, L_2 und L_3 angeschlossen sind, bedeuten. Diese Schaltungsart wird die offene oder Sternschaltung genannt. Hat man die Knotenpunkte o, p, p' . . . verbunden, so heißt die so hergestellte Leitung die Nullleitung oder Mittelleitung. Man benutzt sie gerne zum Anschlusse von Lampen, die man

Fig. 34.



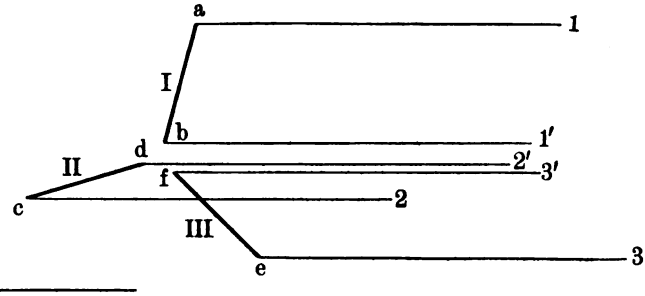
einerseits mit der Nullleitung und anderseits mit einer der Außenleitungen verbindet, wie auch aus Fig. 36, wo die Nullleitung punktirt angedeutet ist, ersehen werden kann.

Bei den Schaltungen zwischen der Nullleitung und je einer Außenleitung oder zwischen je zwei Außenleitern [1]) ist zu beachten, daß die in diesen beiden Fällen wirksamen Maximalspannungen E_0 und E sich wie $1 : \sqrt{3}$ verhalten, also

$$E = \sqrt{3} \, . \, E_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 466\,^{2})$$

Die Spannung E zwischen zwei Außenleitern ist nämlich (wie aus der in Fig. 35 dargestellten Entstehung der Sternschaltung aus drei gleichen einphasigen Wechselstromkreisen durch Zusammenlegung der drei Rückleitungen $1'$, $2'$ und $3'$ in der Nullleitung hervorgeht) anzusehen als die Resultirende

Fig. 35.



[1]) In beiden Fällen ist auf möglichst gleiche Belastung der drei Außenleiter zu sehen.

[2]) Dieselbe Beziehung gilt natürlich auch für die Effectivwerthe $e' = \frac{E}{\sqrt{2}}$ und $e'_0 = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$, also

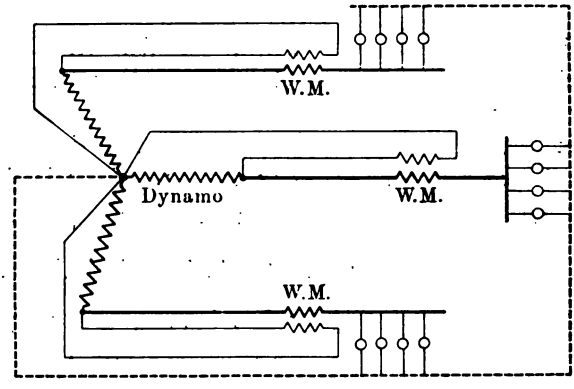
$$e' = \sqrt{3} \, e' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 467)$$

zweier mit der Phasendifferenz $180^0 - 120^0 = 60^0$ zusammenwirkenden gleichgroßen Phasenspannungen E_0, also $E = \sqrt{[E_0^2 + E_0^2 + 2 E_0 E_0 \cos 60^0]}$ oder $E = \sqrt{[E_0^2 + E_0^2 - 2 E_0 E_0 \cos 120^0]} = \sqrt{3 E_0^2} = \sqrt{3} \cdot E_0$, eine Spannung, die (wie auch die im §. 111, Beispiel 3, erörterten geometrischen Constructionen zeigen) gegeben ist durch die Seite AC eines gleichschenkeligen Dreieckes ABC, in dem die Seiten $AB = E_0$ und $BC = E_0$ den Winkel $ABC = 120^0$ einschließen.

Die Stromstärke J (oder $i' = \frac{J}{\sqrt{2}}$ effectiv)[1]) ist in jedem Außenleiter (z. B. I_1) dieselbe wie in der dazu gehörigen „Phase" (Spule I).

Sind als Stromverbrauchsobjecte nur inductionsfreie Widerstände (z. B. Glühlampen, wie in Fig. 36 angedeutet) eingeschaltet, besteht also zwischen e_0'

Fig. 36.



und i' keine Phasendifferenz, so wird die Leistung eines Zweiges des Dreiphasensystems $p' = e_0' i'$, also bei gleicher Belastung der drei Zweige die Gesammtleistung des Systems

$$P' = 3 e_0' i' = 3 \frac{e'}{\sqrt{3}} i' = \sqrt{3} \cdot e' i' \quad . \quad . \quad 468, 469, 470)$$

sein, wo also e' die effective Spannung zwischen zwei Außenleitern und i' die effective Stromstärke in jedem der gleichbelasteten Außenleiter bedeutet, hingegen e_0' den Effectivwerth je einer „Phasenspannung".

Die Fig. 36 zeigt zugleich, wie die Leistung eines Dreiphasensystems bei der hier angenommenen Sternschaltung mittelst dreier Wattmeter gemessen werden kann[2]). Die Hauptspule eines jeden Wattmeters führt den Strom

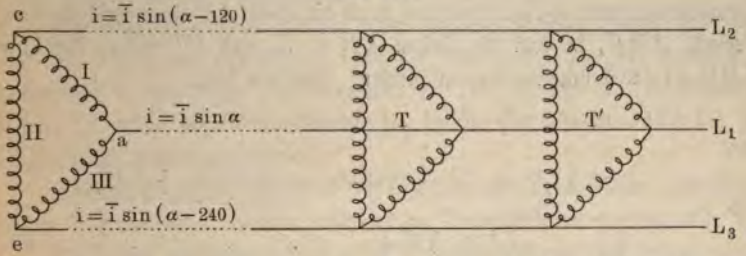
[1]) Statt $J' = \frac{J}{\sqrt{2}}$ schreiben wir hier i', sowie wir e' statt $E' = \frac{E}{\sqrt{2}}$ geschrieben haben.

[2]) Die Figur zeigt die Anordnung bei den Messungen an der zur Zeit der electrotechnischen Ausstellung in Frankfurt a. M. (1891) hergestellten Kraftübertragungs-

einer Außenleitung, während die Nebenspule unter der Spannung der betreffenden Phase steht. Eine andere Wattmeterschaltung wird später zur Sprache kommen.

Wenn die Spulen I, II und III der den Drehstrom liefernden Dynamomaschine und die Spulensysteme T, T' u. s. w. der angeschlossenen Motoren oder primären Transformatorwickelungen nach dem Schema der Fig. 37 geschaltet sind, nennt man die Schaltung die geschlossene oder Dreiecksschaltung. Im Gegensatze zur Sternschaltung[1]), bei der die Rückleitungen von drei einphasigen Wechselstromkreisen in der (bei gleicher Belastung derselben stromlosen) Nullleitung vereinigt sind, bilden je eine Hin- und Rückleitung (1 und 3′, 2 und 1′ und 3 und 2′ in Fig. 38) die drei Hauptleitungen (L_1, L_2 und L_3 in Fig. 37) der Dreiecksschaltung.

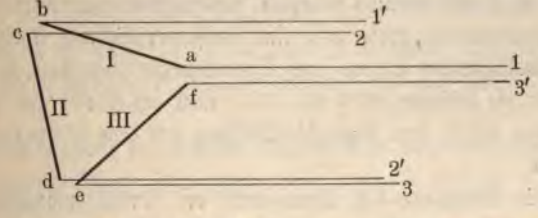
Fig. 37.



Die Sternschaltung und die Dreiecksschaltung pflegt man auch verkettete Schaltungen zu nennen.

Bezeichnet man den Maximalwerth der gleichgroßen Differenzen der Potentialwerthe in den Punkten a und c, c und e und e und a (Fig. 37) mit

Fig. 38.



E_0, so ist damit auch zugleich die Spannung zwischen je zwei Hauptleitungen (stets gleiche Belastung vorausgesetzt) bezeichnet, während bei der Sternschaltung die Phasenspannungen zu den Leitungsspannungen im Verhältnisse $1 : \sqrt{3}$

anlage zwischen Lauffen und Frankfurt, nach dem Berichte von Prof. Dr. H. F. Weber in Zürich. (Officieller Ausstellungsbericht, S. 363.)

[1]) Den wesentlichen Inhalt meiner diesbezüglichen im Jahre 1895 erschienenen Abhandlung findet man in Erhard's Einführung in die Electrotechnik (1897), S. 170 und 171 wiedergegeben.

stehen. Eben dieses Verhältniß besteht nun bei der Dreiecksschaltung zwischen dem Maximalwerthe J_0 eines Phasenstromes (d. h. des in einer Spule des Generators fließenden Stromes) und dem Maximalwerthe J des Stromes in einer Hauptleitung.

Aus der in Fig. 38 veranschaulichten Zusammensetzung der Dreiecksschaltung ist ersichtlich, daß der Stromwerth J die Resultirende ist von zwei mit der Phasendifferenz $180^0 - 120^0 = 60^0$ zusammenwirkenden gleichgroßen Stromcomponenten J_0, somit gegeben durch die Seite AC eines gleichschenkeligen Dreiecks ABC, in dem die Seiten $AB = J_0$ und $BC = J_0$ den Winkel $ABC = 120^0$ miteinander einschließen. Hieraus folgt

$$J = \sqrt{[J_0^2 + J_0^2 + 2 J_0 J_0 \cos 60^0]}$$

oder

$$J = \sqrt{[J_0^2 + J_0^2 - 2 J_0 J_0 \cos 120^0]} = \sqrt{3 J_0^2},$$

also

$$J = \sqrt{3}\, J_0 \quad \ldots \quad 471^1)$$

ganz analog der Gleichung 466 für die Sternschaltung.

Für die Gesammtleistung erhält man bei der Dreiecksschaltung (wenn man auch hier zunächst inductionsfreie Verbrauchsobjecte voraussetzt) in Effectivwerthen ausgedrückt,

$$P' = 3\, e_0' i_0' = 3\, e_0' \frac{i'}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\, e_0' i' \quad \ldots \quad 473, 474, 475)$$

wobei e_0' die Phasenspannung (auch die Spannung zwischen je zwei Hauptleitungen), i_0' den Phasenstrom (Strom in jeder der drei Dynamospulen I, II und III) und i' den Leitungsstrom (Strom in jeder der drei Hauptleitungen L_1, L_2 und L_3) bedeuten.

Sind mit Selbstinduction behaftete Verbrauchsobjecte (Motoren, Transformatoren) angeschlossen, findet also eine Phasenverschiebung zwischen den für die Leistung maßgebenden Strom- und Spannungswerthen statt, so geht in die Ausdrücke für die Leistung (470 und 474) noch ein Factor $\cos \psi$ ein (siehe §. 110, Formel 431), dem durch die Messung mit dem Wattmeter Rechnung getragen wird.

Ueber die Schaltung des Wattmeters bei Drehstromanlagen sei noch folgendes bemerkt.

Schreibt man bei der Sternschaltung das Product $3\, e_0' i'$ (Formel 468) in der Gestalt $e_{01}' i_1' + e_{02}' i_2' + e_{03}' i_3'$, indem man für die Strom- und

---

[1]) Dieselbe Beziehung gilt für die effectiven Mittelwerthe $i' = \frac{J}{\sqrt{2}}$ und $i_0' = \frac{J_0}{\sqrt{2}}$, also

$$i' = \sqrt{3}\, i_0' \quad \ldots \quad 472)$$

Spannungswerthe in den drei Stromkreisen getrennte Bezeichnungen einführt, so kann man diesen Ausdruck mit Rücksicht auf die in Formel 465 gegebene Beziehung $i'_1 + i'_2 + i'_3 = 0$ in der Weise umgestalten, daß man schreibt

$$3\, e'_0\, i' = i'_2\,(e'_{02} - e'_{01}) + i'_3\,(e'_{03} - e'_{01}) \quad . \; . \; . \quad 476)$$

In dieser Gleichung stellen nun $e'_{02} - e'_{01}$ und $e'_{03} - e'_{01}$ die Spannungen der Außenleiter 2 und 3 gegen den Außenleiter 1 vor, während i'_2 und i'_3 die Ströme in den Außenleitern 2 und 3 bedeuten.

Läßt man nun diese Ströme durch die Hauptspulen zweier Wattmeter W_2 und W_3 gehen und schaltet man die Nebenspule von W_2 zwischen die Außenleiter 2 und 1 und die Nebenspule von W_3 zwischen die Außenleiter 3 und 1, so geben diese beiden Wattmeter die in den Formeln 473 bis 475 ausgedrückten Leistungswerthe an.

Dasselbe Verfahren ist, da es sich hier nur um Spannungen und Ströme in den Außenleitungen handelt, auch bei der Dreiecksschaltung anwendbar[1]).

Die beiden Schaltungsarten eines Dreiphasensystems sind bisher nur in schematischen Figuren einfachster und allgemeinster Art veranschaulicht worden und mögen nun noch beispielsweise für einen Motor von bestimmter Grundform dargelegt werden.

Die Fig. 39 (a. f. S.) läßt das Princip erkennen, auf dem bei dem betrachteten Motor die Erzeugung des Drehfeldes beruht.

Ein magnetisch geschlossener Eisenkörper, z. B. Hohlcylinder (in der Zeichnung durch einen Ring ersetzt), ist mit drei Spulenpaaren $A\,A'$, $B\,B'$ und $C\,C'$ bewickelt, von denen A, B und C (von Mitte zu Mitte gerechnet) um je 120 Grade voneinander abstehen, so wie auch die diametral gegenüberliegenden Spulen A', B' und C'[2]).

Eine dreiphasige Dynamomaschine liefert die Ströme $i = \bar{i}\, sin\, \alpha$, $i = \bar{i}\, sin\, (\alpha - 120)$ und $i = \bar{i}\, sin\, (\alpha - 240)$, die, wenn sie in der positiven Phase sind, bei a, b und c eintreten und also bei a', b' und c' austreten.

Da die Summe der Ströme Null ist, kann man entweder die drei bei a, b und c angeschlossenen Zuleitungen, oder auch die drei bei a', b' und c' an-

---

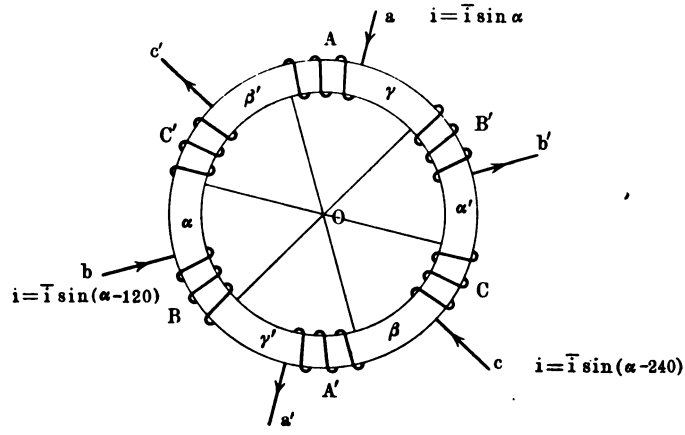
[1]) Bei diesen Wattmetermethoden muß man sich jedoch folgendes gegenwärtig halten. Bei der Ableitung der Formeln (z. B. 473 bis 475) ist durchwegs eine bestimmte Richtung als die positive Richtung für die Strom- und Spannungswerthe angenommen und sind in dem einen Falle (Sternschaltung) nur positive Spannungswerthe und im anderen Falle (Dreiecksschaltung) nur positive Stromwerthe in Rechnung gebracht. In Wirklichkeit aber kann dies nicht zutreffen, da bei dem betrachteten Dreiphasensystem sowohl die Summe der drei Spannungswerthe, als auch die Summe der drei Stromwerthe stets Null ist.

[2]) Die Drähte der drei Spulenpaare muß man sich natürlich auch an den Kreuzungsstellen (in der Figur bei 0) isolirt denken.

geschlossenen Ableitungen in eine einzige, den Summenstrom Null führende Leitung (Nullleitung) vereinigen und erhält so die offene, oder Sternschaltung.

Faßt man jedoch je eine Zu- und Ableitung (z. B. a und c', dann b und a' und endlich auch c und b') in eine gemeinschaftliche Leitung zusammen, so

Fig. 39.



erhält man die geschlossene oder Dreiecksschaltung. In beiden Fällen ist also die Verbindung zwischen Generator und Motor auf nur drei Leitungen beschränkt, wenn man bei der Sternschaltung die bei gleicher Belastung der Außenleitung stromlose Nullleitung weg läßt[1]).

Hinsichtlich der Wirkungsweise des beschriebenen Apparates ist zunächst klar, daß im Allgemeinen jedes der drei Spulenpaare zwei Magnetpole im Ringeisen, α und α', β und β', γ und γ', also jedes Spulenpaar ein Magnetfeld $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$ innerhalb des Ringes erzeugen wird[2]); nur wenn einer der Ströme gerade Null ist, werden nur die zwei Felder von den beiden anderen Strömen vorhanden sein.

Verfolgt man nun den Verlauf z. B. von $^1/_{12}$ zu $^1/_{12}$ Periode, so ergibt sich folgendes.

Ist der Strom I im Spulenpaare AA' gerade im Maximum und be-

[1]) Man wird nicht übersehen, daß bei der in Fig. 39 im Principe dargestellten Erzeugung des Drehfeldes die drei als Componenten in Betracht kommenden Magnetfelder wegen des gemeinschaftlichen Eisenkernes nicht unabhängig voneinander sind, wie z. B. die zwei Felder beim Apparate von Ferraris (Fig. 32). Damit ist auch eine der Voraussetzungen für die Entstehung eines constanten und gleichförmig rotirenden Drehfeldes nicht erfüllt, doch soll im folgenden davon abgesehen werden.

[2]) Es ist aus der Figur unmittelbar ersichtlich, daß, wenn die drei (im folgenden mit I, II und III bezeichneten) Ströme in der positiven Phase sind, in α, β und γ Nordpole und in α', β' und γ' die dazu gehörigen Südpole vorhanden sein müssen.

zeichnet man die Stärke des in diesem Augenblicke in α vorhandenen Nordpoles mit 1, so sind die gleichzeitig in β' und γ' vom Strome II in BB' und vom Strome III in CC' herrührenden Südpole jeder von der Stärke $-\frac{1}{2}$, das heißt, es befinden sich in diesem Augenblicke in β' und γ' ebenfalls Nordpole, aber von der halben Stärke im Vergleiche mit α. Es resultirt also ein Nordpol in α von der Stärke $\frac{3}{2}$[1]). Nach $^1/_{12}$ Periode ist der Strom II Null, der Strom III erzeugt in γ' einen Südpol von der Stärke $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, das heißt einen Nordpol von der Stärke $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Einen ebenso starken Nordpol erzeugt der Strom I in α und es resultirt daher in der Mitte zwischen α und γ' ein Nordpol von der Stärke $\frac{3}{2}$. Das Magnetfeld hat sich also mit unveränderter Stärke um 30 Grade nach links gedreht. Nach abermals $^1/_{12}$ Periode erzeugt I in α einen Nordpol von der Stärke $\frac{1}{2}$ und II einen ebensolchen in β. Dazwischen entsteht in γ', von III erzeugt, ein Südpol von der Stärke -1, also ein Nordpol von der Stärke 1; es resultirt also in γ' ein Nordpol von der Stärke $\frac{3}{2}$. Das Magnetfeld ist also mit fortwährend unveränderter Stärke um weitere 30 Grade (nach γ') im Sinne nach links vorgerückt u. s. w.[2]).

Die Drehung des Feldes erfolgt stets in der Richtung der abnehmenden Phasen.

Hieraus folgt der wichtige, schon von Tesla practisch angewendete Satz: daß die Drehungsrichtung des Feldes umgekehrt wird, wenn man am Motor zwei Stromzuleitungen miteinander vertauscht, z. B.

---

[1]) Es ist nämlich der Componentenwinkel, den die Felder $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$ (deren jedes die Stärke $\frac{1}{2}$ hat) miteinander einschließen, gleich 120°. Hieraus resultirt eine zur Feldstärke von $\alpha\alpha'$ (die gleich 1 ist) sich addirende Feldstärke vom Betrage $\frac{1}{2}$. Nach $^1/_{12}$ Periode sind die Magnetfelder $\alpha\alpha'$ und $\gamma\gamma'$ (deren jedes von der Stärke $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ist) unter einem Componentenwinkel von 60° zusammenzusetzen, woraus wieder die Feldstärke $\frac{3}{2}$ resultirt.

[2]) Die dem angeführten Beispiele zu Grunde liegenden Rechnungen lassen sich leicht ausführen und weiter fortsetzen mit Hilfe der nachstehenden Zusammenstellung gleichzeitiger Sinuswerthe für die Ströme I, II und III:

[Fortsetzung (Tabelle) auf folgender Seite.]

die der Ströme $i = \bar{i} \sin(\alpha - 120)$ und $i = \bar{i} \sin(\alpha - 240)$. Darin besteht die sogenannte Umsteuerung des Motors.

Der vorhin beschriebene mit den drei gleichen symmetrisch gelegenen Spulensystemen AA', BB' und CC' versehene[1]), in Fig. 39 ringförmig dargestellte Eisenkörper bildet in unserem Beispiele den das Drehfeld erzeugenden feststehenden Theil, den sogenannten Ständer (stator) des Motors.

Innerhalb dieses Ständers befindet sich der bewegliche (rotirende) Theil des Motors, der sogenannte Läufer (rotor), beim asynchronen Motor z. B. in der Gestalt des bereits erwähnten Kurzschlußankers, nämlich eines hohlcylindrischen Eisenkörpers mit „geschlossener Wickelung", das heißt: mit zur Axe parallelen und beiderseits an den Enden leitend verbundenen kupfernen Drähten oder Stäben versehen, die entweder an der Mantelfläche, oder in Nuthen oder auch in Durchbohrungen[2]) des Eisenkörpers verlaufen.

Aus den Erörterungen im §. 117 geht hervor, daß auch ein Leiter ohne Eisenkern und ohne Bewickelung (z. B. eine Kugel oder ein Cylinder aus einem beliebigen gut leitenden Metalle) im Drehfelde in Rotation kommen würde; der Kurzschlußanker ist aber als Läufer besser geeignet, weil der Eisen-

α	90	120	150	180	210	240	270	300
I	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
II	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
III	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

α	330	360	30	60	90	120	150	180
I	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
II	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
III	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

[1]) Anstatt dreier Spulenpaare können auch drei je ein Drittel eines Ringes bedeckende Spulen angewendet werden, wie es z. B. bei der Abzweigung eines Drei-phasenstromes von einem Gramme'schen Ringe zutrifft. (Siehe Fig. 40.)

[2]) Eine ähnliche Construction finden wir auch beim Ständer eines Motors der Allgem. Electr. Gesellschaft. (Sahulka, Ueber Wechselstrommotoren, S. 16 u. 28.)

kern das Magnetfeld verstärkt und die kupfernen Leiter die inducirten Ströme in vortheilhaftere Bahnen lenken [1]).

Dem Läufer des asynchronen Drehstrommotors wird kein Strom von außen zugeführt; seine Bewegung erfolgt durch die Wechselwirkung zwischen dem Drehfelde und den von diesem im Läufer inducirten Strömen. Man nennt deßhalb Motoren dieser Art auch Inductionsmotoren; sie zeichnen sich durch Einfachheit des Baues aus, haben keinen Collector und können unter Belastung angehen.

Den Inductionsmotoren werden auch die Motoren beigezählt, die auf dem von Brown benutzten Principe beruhen, daß ein einmal in Bewegung gesetzter rotirender Leiter in einem Wechselfelde in derselben Richtung fortrotirt. Man hat solche Motoren in der Art ausgeführt, daß sie als zweiphasige Drehstrommotoren anlaufen und dann als einphasige Wechselstrommotoren arbeiten.

Bei den asynchronen Drehstrommotoren, von denen bisher die Rede war, vollzieht sich innerhalb der Dauer einer Periode ein Umlauf des Drehfeldes. Man hat aber asynchrone Motoren auch so construirt, daß das Drehfeld innerhalb einer Periode nur einen Bruchtheil, z. B. nur die Hälfte oder ein Viertel eines ganzen Umlaufes zurücklegt. Hierher gehören die Motoren mit „mehrfachem Drehfeld", wie z. B. die mehrpoligen zwei- und dreiphasigen Motoren von Tesla [2]) und von v. Dolivo-Dobrowolsky und Brown [3]),

[1]) Beim sogenannten Phasenläufer besteht die Wickelung aus drei Abtheilungen („Phasen"), die durch Vermittelung dreier Schleifringe in verketteter Schaltung mit drei inductionsfreien Vorschaltwiderständen in Verbindung stehen, von denen beim Anlassen des Motors Gebrauch gemacht wird („Anlaßwiderstände"). Dies geschieht zur Verminderung der durch die Selbstinduction in der Läuferwickelung bewirkten, dem magnetischen Drehungsmomente beim Anlassen sehr abträglichen Phasenverschiebung zwischen Läuferspannung und Läuferstrom.

Im Gegensatze zum Phasenläufer wird der Kurzschlußanker wohl auch Trillerläufer genannt.

[2]) Sahulka, Ueber Wechselstrommotoren, S. 18.

Beim mehrpoligen Zweiphasenmotor Tesla's sind an der inneren Seite des eisernen Ständers acht radial nach einwärts gerichtete, um je $^1/_8$ des Ständerumfanges voneinander abstehende Polansätze 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 angebracht. Die Bewickelung von 1, 3, 5 und 7 wird von einem Strome $i = \bar{i} \cos \alpha$ in der Art durchflossen, daß abwechselnd entgegengesetzte Pole entstehen. Die Bewickelung von 2, 4, 6 und 8 wird ebenso von einem Strome $i = \bar{i} \sin \alpha$ durchflossen. Es entsteht so ein Magnetfeld, das innerhalb einer Viertelperiode aus der Lage 1, 3, 5, 7 in die Lage 2, 4, 6, 8 u. s. w. vorrückt und also binnen einer Periode einen halben Umlauf macht. Die Tourenzahl des Läufers wird also während n Perioden hinter $\frac{n}{2}$ zurückbleiben.

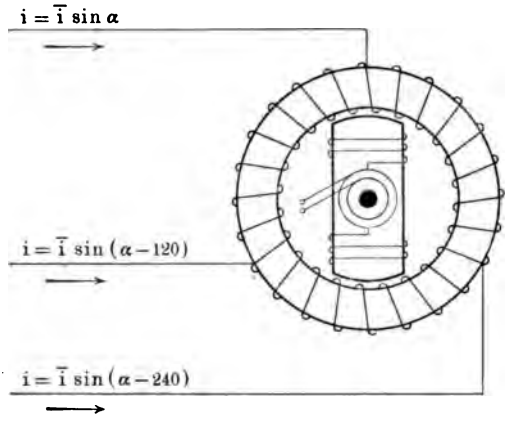
Beim Tesla-Motor, den man als Zweiphasenmotor mit „einfachem Drehfeld" bezeichnet (Sahulka, l. c., S. 12), sind vier Polansätze, 1, 2, 3, 4 je $^1/_4$ Umfang voneinander angebracht und 1 und 3 von $i = \bar{i} \cos \alpha$ und 2 und 4 von $i = \bar{i} \sin \alpha$ wie vorhin durchflossen.

[3]) Sahulka, l. c., S. 30.

auf deren Conſtruction und Wirkungsweiſe jedoch hier nicht näher eingegangen werden kann. Daſſelbe gilt von den multipolar ausgeführten ſynchron laufenden Motoren[1]).

Bei der Darlegung des Principes der ſynchronen Drehſtrommotoren im Allgemeinen iſt bereits erwähnt worden, daß bei Motoren dieſer Art ein Electromagnet als Läufer dient, der durch Vermittelung von Schleifringen den magnetiſirenden Gleichſtrom von außen zugeführt erhält. Zur beſſeren Veranſchaulichung mag hier noch die Fig. 40 Platz finden, die Hafelwanders ſynchronen Motor mit einfachem Drehfelde ſchematiſch darſtellt[2]).

Fig. 40.



Bei der aſynchronen Drehſtrommotoren bleibt der Läufer, wie ſchon bemerkt worden iſt, in der Rotation hinter dem Drehfelde zurück und zwar mehr oder weniger bei größerer oder kleinerer Belaſtung. Man nennt dieſen Unterſchied der Winkelgeſchwindigkeiten (oder Tourenzahlen) des Drehfeldes und des Läufers die Schlüpfung (slip) des Drehfeldes und drückt ſie wohl in Procenten der Tourenzahl des Drehfeldes aus.

Es iſt einleuchtend, daß bei größerer Schlüpfung mehr Läuferdrähte in der Zeiteinheit von den Kraftlinien des Drehfeldes geſchnitten werden und in Folge der damit bewirkten Verſtärkung des Läuferſtromes auch eine größere Zugkraft, d. h. ein größeres Drehungsmoment (torque) vom Motor ausgeübt wird.

Die Schlüpfung darf, wenn der Wirkungsgrad groß ſein ſoll, nur wenige Procente betragen. Bezeichnet man nämlich die Zugkraft im Abſtande $= 1$ von der Axe mit T, ferner mit Ω die Winkelgeſchwindigkeit des Drehfeldes und mit ω jene des Läufers, alſo mit $\Omega - \omega$ die Schlüpfung, ſo iſt die disponible Leiſtung (total watts) $W = T\Omega$ und die nutzbare Leiſtung (usefull watts) mit Einſchluß der Reibungsarbeit, $w = T\omega$, ſomit der Wirkungsgrad $\frac{w}{W} = \frac{\omega}{\Omega}$, worauf wir ſpäter (Formel 500) noch zurückkommen.

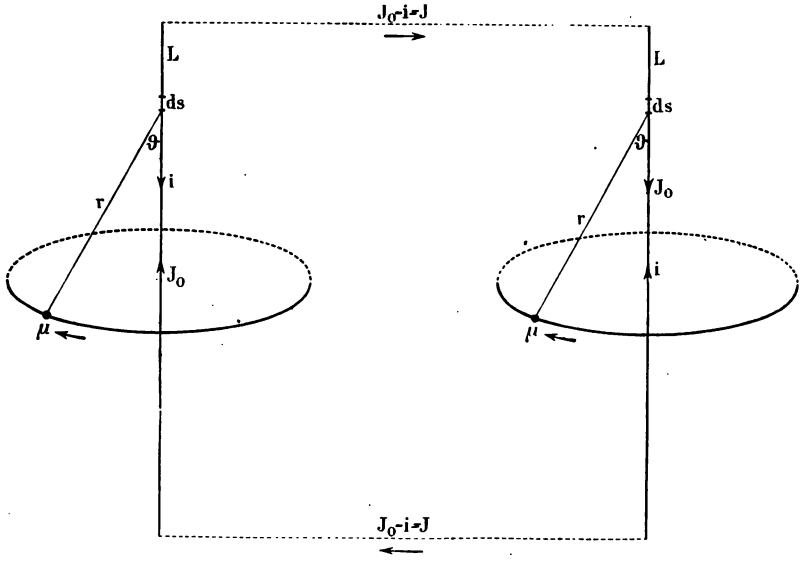
[1]) l. c., S. 20.
[2]) l. c., S. 28.

VI. Abschnitt.

Kraftübertragung. Als ein Beispiel für die Anwendung der Formeln 120
für electrische Arbeitsgrößen, Wirkungsgrade, Spannungsverluste und dergleichen wollen wir den Vorgang einer sogenannten electrischen „Kraftübertragung" oder vielmehr Arbeitsübertragung betrachten.

Um die darauf bezüglichen Gesetze ganz allgemein abzuleiten, denken wir uns einen möglichst einfachen Vorgang dieser Art. Anstatt der stromgebenden Dynamomaschine (primäre Maschine genannt) denken wir uns eine der beiden in Fig. 41 dargestellten Vorrichtungen.

Fig. 41.



Einen mit der nördlichen magnetischen Quantität μ begabten Punkt führen wir in einer kreisförmigen Bahn, deren Ebene auf dem geraden Leiter L senkrecht steht, um diesen herum, z. B. in der Richtung des beigefügten Pfeiles. Dadurch induciren wir in dem Leiter L (den wir uns außerhalb des Bereiches der inducirenden Wirksamkeit des Punktes μ auf später zu besprechende Art geschlossen denken) einen Strom. Diesen Strom lassen wir in den Leiter L einer zweiten, ebensolchen Vorrichtung (wie Fig. 41 darstellt) eintreten. Sofort wird dieser Strom in dieser zweiten Vorrichtung, die uns den Electromotor (secundäre Maschine genannt) vorstellt, einen Antrieb auf den magnetischen Punkt μ ausüben, wodurch dieser, wenn er nördlich magnetisch ist und wenn der von der primären Maschine kommende Strom J_0 in der Richtung von

oben eintritt, in der Richtung des dem Kreise beigefügten Pfeiles (also dem Uhrzeiger entsprechend) in Bewegung gesetzt wird. Wir wollen annehmen, daß diese Bewegung in der dem Punkte μ vorgezeichneten kreisförmigen Bahn nicht ohne Reibung stattfinde. Dann wird die anfangs beschleunigte Bewegung alsbald in eine gleichförmige, z. B. mit der Geschwindigkeit v, übergehen. Anderseits wird aber die kreisende Bewegung des Punktes μ um den Leiter L in demselben einen dem Strome J_0 entgegengesetzten Strom i induciren, so daß, sobald die gleichförmige Bewegung des Punktes μ eingetreten ist, ein Strom $J = J_0 - i$ in dem die beiden Maschinen enthaltenden Stromkreise circulirt. Ich habe den bei stillstehendem Electromotor circulirenden Strom J_0 der Primärmaschine „Ruhestrom" genannt [1]), hingegen den bei arbeitendem Electromotor circulirenden Strom $J = J_0 - i$ „Arbeitsstrom".

Der Antrieb auf den Punkt μ ist dann nach dem Biot-Savart'schen Gesetze (Formel 349)

$$p = (J_0 - i)\,\mu \int \frac{ds \sin\vartheta}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 477)$$

wobei ds, ϑ und r die aus der Zeichnung ersichtliche Bedeutung haben. Die Arbeitsstärke (Leistung) ist vermöge der Geschwindigkeit v

$$a = pv = (J_0 - i)\,\mu v \sigma \ldots\ldots\ldots \quad 478)$$

wenn wir das Integral kürz mit σ bezeichnen.

Es läßt sich leicht zeigen, daß $\mu v \sigma$ die dem inducirten Gegenstrome i entsprechende „electromotorische Gegenkraft" e ist. Der inducirte Strom i wirkt auf den durch seine Bewegung inducirenden magnetischen Punkt μ zurück mit einer Kraft, die nach dem Lenz'schen Gesetze der inducirenden Bewegung entgegengesetzt ist und nach dem Biot-Savart'schen Gesetze die Intensität

$$i\mu \int \frac{ds \sin\vartheta}{r^2} = i\mu\sigma$$

hat. Da die Geschwindigkeit der inducirenden Bewegung v ist, so stellt $i\mu v\sigma$ die Inductionsarbeit, d. h. die zur Erzeugung des inducirten Stromes i aufgewendete Leistung vor, die zur Ueberwindung der nach dem Lenz'schen Gesetze stattfindenden Rückwirkung des inducirten Stromes auf den magnetischen Punkt μ erforderlich ist. Ist die dem Strome i entsprechende inducirte electromotorische Gegenkraft e, so stellt ie das Arbeitsvermögen des Stromes i für die Zeiteinheit oder dessen Arbeitsstärke vor. Diese muß aber der bei der Induction des Stromes i aufgewendeten Arbeitsstärke $i\mu v\sigma$ gleich sein, woraus folgt

$$e = \mu v \sigma \ldots\ldots\ldots \quad 479)$$

was zu beweisen war.

---

[1]) In meiner Abhandlung: Ueber den Kravogl'schen Electromotor und über die Berechnung der Nutzeffecte electromagnetischer Maschinen im Allgemeinen. Dingler's polytechnisches Journal, Bd. 188 (1868), S. 346.

Die mechanische Leistung der Secundärmaschine ist also, wie aus den Formeln 478 und 479 folgt,

$$a = (J_0 - i)\,e \quad \ldots\ldots\ldots \quad 480)$$

oder, wenn R den Widerstand des ganzen Stromkreises bedeutet, wegen $i = \frac{e}{R}$,

$$a = (J_0 - i)\,i\,R \quad \ldots\ldots\ldots \quad 481)$$

Dieser Ausdruck gilt für jede Kraftübertragung und stellt die von der Secundärmaschine verrichtete mechanische Leistung mit Einschluß der Reibungsarbeit vor.

Außerdem wird aber auch durch den Arbeitsstrom $J_0 - i$ im ganzen Stromkreise Wärme entwickelt und dazu die Leistung

$$w = (J_0 - i)^2\,R \quad \ldots\ldots\ldots \quad 482)$$

aufgewendet. Die Summe beider Arbeitsgrößen ist die Gesammtarbeit pro Zeiteinheit oder disponible Arbeitsstärke D und hat den Werth

$$D = (J_0 - i)\,i\,R + (J_0 - i)^2\,R = (J_0 - i)\,J_0\,R \quad \ldots \quad 483)$$

Für $J_0\,R$ kann man aber auch die electromotorische Kraft E der Primärmaschine einsetzen. Man erhält dann

$$(J_0 - i)\,E = (J_0 - i)\,e + (J_0 - i)^2\,R \quad \ldots\ldots \quad 484)$$

oder

$$E = e + (J_0 - i)\,R \quad \ldots\ldots\ldots \quad 485)$$

wobei $(J_0 - i)\,R = J\,R$ den Spannungsverlust zufolge des Widerstandes im ganzen Stromkreise darstellt. Dieser Widerstand $R = L + U + u$ besteht aus dem Widerstande L der Leitung, dem inneren Widerstande U der primären und dem inneren Widerstande u der secundären Maschine. Man kann demnach auch sagen

$$E = JU + JL + Ju + e \quad \ldots\ldots\ldots \quad 486)$$

oder

$$E - JU = e + Ju + JL \quad \ldots\ldots\ldots \quad 487)$$

oder endlich, wenn man die Polspannungen $E - JU = \Delta$ und $e + Ju = \delta$ für die primäre und secundäre Maschine einführt,

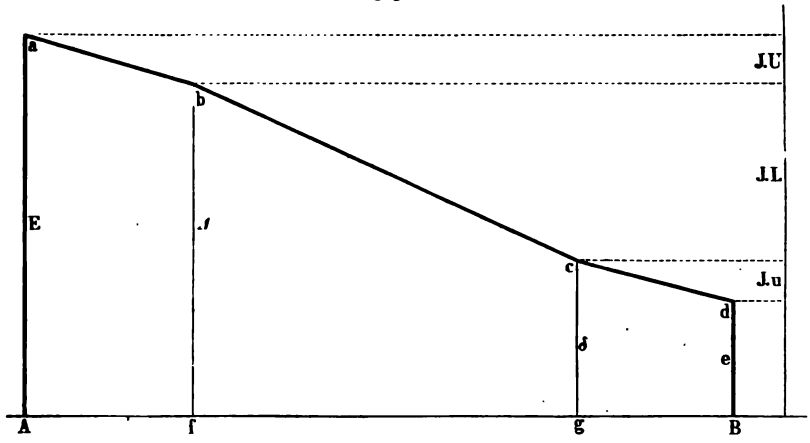
$$\Delta = \delta + JL \quad \ldots\ldots\ldots \quad 488)$$

d. h. die Klemmenspannung der primären Maschine ist um den Betrag JL des Spannungsverlustes auf der Linie (wir verstehen unter L den Widerstand der Hin- und Rückleitung) größer als die Klemmenspannung der secundären Maschine.

Der Sinn der vier letzten Gleichungen, die sich leicht als Lehrsätze aussprechen lassen, ist im Diagramme Fig. 42 (a. f. S.) anschaulich gemacht, das keiner weiteren Erläuterung bedarf.

Beispiel. Eine Arbeitsstärke von $A = 66\,PS$ wird mittelst einer Turbine auf eine Dynamomaschine (wir bezeichnen sie mit I) übertragen. Der

Fig. 42.



Wirkungsgrad der Maschine I ist $f_1 = 0{,}9$; sie liefert also die electrische Leistung $f_1 A = 59{,}4\ PS = 59{,}4 \times 736$ Watt. Die Klemmenspannung der Maschine I ist $\Delta = 1150$; sie liefert also die Stromstärke

$$J = \frac{59{,}4 \times 736}{1150} = 38 \text{ Ampère.}$$

Die Hin- und Rückleitung (900 Meter Kupferdraht von 5 mm)[1] hat den Widerstand $L = 0{,}68$ Ohm und bewirkt also einen Spannungsverlust $\Delta - \delta = JL = 38 \times 0{,}68 = 25{,}8$[2]; die Klemmenspannung der Secundärmaschine (II) ist demnach $\delta = \Delta - 25{,}8 = 1124{,}2$. Dieser Electromotor empfängt also die electrische Leistung

$$J\delta = 38 \times 1124{,}2 \text{ Watt} = \frac{38 \times 1124{,}2}{736} = 58\,PS.$$

Vermöge ihres Wirkungsgrades $f_2 = 0{,}9$ gibt die Maschine II die mechanische Leistung $a = f_2 \,.\, 58 = 52{,}2\,PS$ ab. — Der Wirkungsgrad dieser Kraftübertragung ist demnach $\frac{a}{A} = \frac{52{,}2}{66{,}0} = 0{,}791$ und kann auch dargestellt

[1]) 5 mm Durchmesser also 19,6 mm² Querschnitt.

[2]) In Procenten beträgt dieser Spannungsverlust

$$p = 100\,\frac{\Delta - \delta}{\Delta} = 100\,\frac{25{,}8}{1150} = 2{,}24 \text{ Proc.}$$

Der sogenannte „Wirkungsgrad der Leitung" ist also

$$f_3 = \frac{\delta}{\Delta} = \frac{100 - p}{100} = 0{,}977.$$

werden als das Product dreier Wirkungsgrade

$$f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 = f_1 \cdot f_2 \cdot \frac{\delta}{\Delta} = 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}977,$$

nämlich der primären Maschine, der secundären Maschine und der Leitung.

Die Widerstände und Spannungsverluste in den einzelnen Theilen des Stromkreises sind:

$U = 1{,}46$; $JU = 38 \times 1{,}46 = 55{,}5$ in der Maschine I,
$u = 1{,}40$; $Ju = 38 \times 1{,}40 = 53{,}2$ in der Maschine II,
$L = 0{,}68$; $JL = 38 \times 0{,}68 = 25{,}8$ in der Leitung,
$R = 3{,}54$; $JR = 38 \times 3{,}54 = 134{,}5$ im ganzen Stromkreise,

folglich die electromotorischen Kräfte beider Maschinen

$$E = \Delta + JU = 1150 + 55{,}5 = 1205{,}5$$
$$e = \delta - Ju = 1124{,}2 - 53{,}2 = 1071{,}0$$

also . . . . . $E - e = JR = 134{,}5$ wie oben.

Der Ruhestrom ist $J_0 = \frac{E}{R} = 340$ Ampère,

der Gegenstrom $i = \frac{e}{R} = 302$ „

folglich der Arbeitsstrom $J = J_0 - i = 38$ Ampère[1]).

Das Beispiel läßt sich leicht verallgemeinern. Ist A die disponible Arbeitsstärke in Pferdekräften, also $736\,A$ in Watt, so gibt der Ausdruck:

$$f_1 \cdot \frac{736\,A}{\Delta} = J \quad \ldots\ldots\ldots \quad 489)$$

den Arbeitsstrom. Ist ferner p der gestattete Spannungsverlust in Procenten, so ergibt sich:

$$\delta = \frac{100 - p}{100} \cdot \Delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 490)$$

Endlich erhält man für die von der Secundärmaschine abgegebene Arbeitsstärke in Pferdekräften:

$$a = f_2 \cdot \frac{J\delta}{736} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 491)$$

Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich der Wirkungsgrad der ganzen Kraftübertragung:

$$\frac{a}{A} = f_2 \cdot \frac{J\delta}{736} \cdot \frac{736 f_1}{J\Delta} = f_1 \cdot f_2 \cdot \frac{\delta}{\Delta} = f_1 \cdot f_2 \cdot \frac{100 - p}{100} \quad 492)$$

[1]) Dieses Beispiel betrifft eine wirklich ausgeführte Kraftübertragungsanlage, über die mir Herr Prof. Pfaundler genaue Angaben freundlichst mitgetheilt hat.

Dabei sind also die Wirkungsgrade der beiden Maschinen und der Leitung

$$f_1 = \frac{J\Delta}{736\,A},\quad f_2 = \frac{736\,a}{J\delta}\quad \text{und}\quad f_3 = \frac{\delta}{\Delta} = \frac{100 - p}{100} \quad . \quad . \quad 493)$$

121 **Zugkraft**[1]). Für die Zugkraft p am Umfange der Riemenscheibe einer Gleichstromdynamomaschine, die als Motor dient, hat bekanntlich Deprez den Satz aufgestellt, daß sie eine Function des Ankerstromes J sei

$$p = F(J) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 494)$$

und zwar eine Function des Ankerstromes allein.

Um diesen Zusammenhang näher zu untersuchen, erwägen wir folgendes.

Nach Formel 480 wird die mechanische Leistung a der Secundärmaschine ausgedrückt durch das Product Je, wobei J den Arbeitsstrom ($= J_0 - i$ nach den im §. 120 gebrauchten Bezeichnungen) und e die electromotorische Kraft im Anker bedeuten. Wir wollen annehmen J sei in Ampère und e in Volt, also Je in Watt gegeben, dann ist die mechanische Leistung in Secundenmeterkilo $= \frac{Je}{9{,}81}$ (nach Formel 59). — Diese Leistung kann aber anderseits auch ausgedrückt werden durch $pu \cdot \frac{n}{60}$, wenn p die Zugkraft in Kilogrammen, u den Umfang der Riemenscheibe in Metern und n die Tourenzahl pro Minute bedeuten; es ist demnach $\frac{Je}{9{,}81} = pu \cdot \frac{n}{60}$. — Nach Formel 119 ist aber $e = \frac{NZn}{6 \cdot 10^9}$, wobei N die Anzahl der Ankerdrähte (§. 43) und Z die Gesammtzahl der das Ankereisen durchsetzenden Kraftlinien bedeuten. Hieraus folgt

$$p = \frac{N}{9{,}81 \times 10^8 u} \cdot JZ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 495)$$

d. h. die Zugkraft ist mit dem Producte aus Stromstärke und Feldstärke proportional und außerdem von den Größen N und u abhängig.

Erwägt man weiter, daß Z selbst eine Function der Stromstärke ist (siehe die Formel 223 im §. 78), so findet der Deprez'sche Satz 494 seine Bestätigung.

Beispiel. Für die in meiner Abhandlung über die Charakteristik von Deprez besprochene Maschine hat sich folgendes ergeben. Schreibt man nach Frölich $e = \frac{Jn}{a + bJ}$, also $\frac{Je}{9{,}81} = pu\,\frac{n}{60} = \frac{J^2 n}{9{,}81\,(a + bJ)}$, so erhält man $p = \frac{60}{9{,}81\,u} \cdot \frac{J^2}{a + bJ}$. Der Umfang der Riemenscheibe (15 cm

[1]) Siehe Seite 284.

Durchmesser) ist $u = \pi \times 0{,}15 = 0{,}471$, folglich sehr nahe $p = 13\,\frac{J^2}{a + bJ}$, und, wenn man die aus Versuchen abgeleiteten Werthe $a = 85$ und $b = 19$ einsetzt [1]), $p = 13\,\frac{J^2}{85 + 19\,J}$. — Demnach müßte die Zugkraft bei einer Stromstärke $J = 9{,}5$ Ampère 4,4 kg betragen, während der Bremsversuch 3,4 kg ergab, entsprechend einem Wirkungsgrade von 77 Proc.

Für asynchrone Drehstrommotoren ist die Zugkraft, wenn wir die am Schlusse des §. 119 bereits angegebenen Bezeichnungen beibehalten und noch eine mit der Feldstärke, dem Läuferradius sowie mit der Länge und dem Widerstande der Leiter des Läufers proportionale Constante f einführen [2]), gegeben durch den Ausdruck

$$T = f\,(\Omega - \omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 496)$$

folglich die mit W und w bezeichneten Leistungswerthe durch die Ausdrücke

$$W = \Omega\,T = \Omega f\,(\Omega - \omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 497)$$

und

$$w = \omega\,T = \omega\,f\,(\Omega - \omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 498)$$

Die durch calorische Effecte im Läufer verlorene Leistung beträgt demnach

$$W - w = f\,(\Omega - \omega)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 499)$$

welche Ausdrücke ganz analog sind den bei der Kraftübertragung (§. 120, Formeln 483, 481 und 482) aufgestellten Ausdrücken

$$J_0\,R\,(J_0 - i), \quad i\,R\,(J_0 - i) \quad \text{und} \quad R\,(J_0 - i)^2$$

für die disponible, nutzbare und durch Stromwärme verlorene Leistung.

Diese Beziehungen lassen sich graphisch erläutern durch ein Quadrat Ω^2, zerlegt in ein Quadrat $(\Omega - \omega)^2$, zwei Rechtecke $\omega\,(\Omega - \omega)$ und ein Quadrat ω^2.

Dabei ist auf die Verluste im Ständer (Drahtwärme, Hysteresis, Wirbelströme) keine Rücksicht genommen [3]).

Aus den Gleichungen 497 und 498 folgt der schon am Schlusse des §. 119 erwähnte Ausdruck für den Wirkungsgrad des Motors

$$\frac{w}{W} = \frac{\omega}{\Omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 500)$$

---

[1]) Bei mehrere Jahre früher ausgeführten Versuchen hatten sich die in meiner citirten Abhandlung angegebenen Werthe $a = 90{,}6$ und $b = 19{,}89$ ergeben, aus denen $p = 4{,}2$ kg und somit ein Wirkungsgrad von 81 Proc. folgen würde. Thatsächlich ist der Wirkungsgrad dieser schon seit 1883 benutzten Maschine älterer Construction viel kleiner.

[2]) Silv. Thompson, Polyphase Electric Currents.

[3]) Silv. Thompson, Polyphase Electric Currents.

Für die Zugkraft p in Kilogrammen, die erforderlich ist, um auf einem Bahngeleise bei einer Steigung von s pro Mille eine Last von Q Tonnen zu fördern, gilt ein Ausdruck von der Form

$$p = (h + s)\, Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 501)$$

wobei h die Zugkraft in Kilogrammen pro Tonne auf horizontaler Strecke bedeutet, bei Straßenbahngeleisen (nach Uppenborn[1]) zwischen 8 und 15 variirend und meist etwa 12 betragend[2]).

Ist v die Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde, dann ist die Leistung in Pferdestärken

$$P = \frac{(h + s)\, Qv \times 1000}{3600 \times 75} = \frac{(h + s)\, Qv}{270} \quad . \quad . \quad . \quad 502)$$

Hieraus ergäbe sich unter der Annahme eines Wirkungsgrades f_2[3]) die Zahl der electrischen Pferdekräfte

$$P_{(e)} = \frac{(h + s)\, Qv}{270 \times f_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 503)$$

Durch Multiplication dieser Zahl mit $\frac{736}{v}$ erhält man die Zahl der Wattstunden pro Wagenkilometer

$$= 3{,}89\ (h + s)\, Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 504)$$

122 **Bemessung electrischer Leitungen.** Es kommt nicht nur darauf an, daß eine electrische Leitung hinreichend stark sei, um nicht eine schädliche oder wohl gar gefahrbringende Erhitzung durch die Stromwärme zu erleiden, sondern es darf auch der mit der Entwickelung der Stromwärme verbundene Effectverlust ein gewisses, in öconomischer Hinsicht zulässiges Maß nicht überschreiten, wobei anderseits auch die Anlagekosten und deren Verzinsung in Betracht kommen. Schon W. Thomson (Lord Kelvin) hat auf die Nothwendigkeit hingewiesen, diese Umstände bei der Bemessung electrischer Leitungen zu berücksichtigen, und hat eine auf das Minimum der Kosten abzielende Berechnungsart der Querschnitte electrischer Leitungen im Allgemeinen angedeutet. Diese Berechnungsart hat aber nicht zu practisch brauchbaren Ergebnissen geführt, weil die Grundlagen der Rechnung einerseits unvollständig und anderseits nicht ganz zutreffend waren. In Folge dessen ist das Thomson'sche Princip lange Zeit unbenutzt geblieben.

---

[1]) Kalender 1902, S. 241.

[2]) Corsepius, Grundlagen für die Berechnung und den Bau von electrischen Bahnen und deren practische Benutzung (in Voit's Sammlung electrotechnischer Vorträge), Seite 80, gibt für die gewöhnlichen Straßenbahnverhältnisse $h = 15$ an.

[3]) Diese Bezeichnung ist im Einklang mit den im §. 120 gebrauchten Bezeichnungen der Wirkungsgrade.

Erst C. Hochenegg hat auf vervollständigten und richtig gestellten Grundlagen einen Calcul aufgebaut, der eine sichere Berechnung des sogenannten wirthschaftlichen Querschnittes einer electrischen Leitung ermöglicht und im Zusammenhange damit auch ein die allgemeinste Anwendung gestattendes System von graphischen Methoden zum Entwerfen ganzer Leitungsnetze[1]).

Ohne hierauf näher eingehen zu können, wollen wir nur einige besonders bemerkenswerthe Lehrsätze hier anführen.

Die Berechnung des wirthschaftlichen Querschnittes einer electrischen Leitung (es soll hier nur von den sogenannten Hauptleitungen die Rede sein) ergibt sich in folgender Weise.

Die jährlichen sogenannten Stromfortleitungskosten einer Hauptleitung[2]) setzen sich zusammen aus drei Theilen.

1. Aus den Kosten für Verzinsung, Amortisation und Instandhaltung der Leitungsanlage.

Der Preis eines Kabels pro Meter läßt sich nach Hochenegg ausdrücken in der Form $aq + c$, wobei q den Kupferquerschnitt bedeutet, während a und c Constante sind. Bezeichnet man dann die Länge des Kabels mit l, so können wir die Anlagekosten der Leitung in ähnlicher Weise ausdrücken durch $l(aq + c) + c'$, wobei c' wieder eine Constante ist.

Ist nun p_1 der Procentsatz für Verzinsung, Amortisation und Instandhaltung der Leitungsanlage, so beträgt der daraus sich ergebende Antheil der Stromfortleitungskosten

$$K_1 = \frac{p_1}{100}\,[l(aq + c) + c'] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 505)$$

2. Ein zweiter Antheil an den jährlichen Stromfortleitungskosten ergibt sich aus dem Umstande, daß zur Bestreitung des Effectverlustes in der Leitung ein Theil der Leistung der Betriebsanlage in Anspruch genommen ist. Man muß deßhalb auch einen entsprechenden Theil der Verzinsungs-, Amortisations- und Instandhaltungskosten der Betriebsanlage in die Stromfortleitungskosten einbeziehen.

Um diesen Betrag zu finden, erwäge man folgendes.

Dividirt man die Kosten der Betriebsanlage durch die in Watt ausgedrückte volle Leistung derselben, so bedeutet der so erhaltene Quotient b den auf 1 Watt kommenden Theil der Kosten der Betriebsanlage. Auf den vollen Effectverlust $J^2 r$ in der Leitung vom Widerstande $r = \frac{l\varrho}{q}$ kommt also als

---

[1]) C. Hochenegg, Anordnung und Bemessung electrischer Leitungen. 2. Auflage, 1897.

[2]) l. c., S. 64.

Betriebsanlagekosten-Antheil der Betrag bJ^2r oder $bJ^2\frac{l\varrho}{q}$. Dabei bedeutet J die Vollbetriebsstromstärke [1]), l und q Länge und Kupferquerschnitt der Leitung und ϱ den specifischen Widerstand des Kupfers, bezogen auf $l = 1$ m und $q = 1\,\text{mm}^2$.

Ist nun p_2 der Procentsatz für Verzinsung, Amortisation und Instandhaltung der Betriebsanlage, so ist der den jährlichen Stromfortleitungskosten zuzurechnende, aus den Betriebsanlagekosten herrührende Theil

$$K_2 = \frac{p_2}{100} \cdot b \cdot J^2 \frac{l\varrho}{q} \quad \ldots\ldots \quad 506)$$

3. Den dritten Theil der jährlichen Stromfortleitungskosten bilden die zur Bestreitung des jährlichen Effectverlustes in der Leitung aufzuwendenden Betriebskosten.

Bezeichnet man mit β die Betriebskosten für eine Wattstunde, dann wird man die durch die Effectverluste in der Leitung verursachten jährlichen Betriebskosten ausdrücken können durch

$$K_3 = \beta \,.\, T \,.\, J^2 \frac{l\varrho}{q} \quad \ldots\ldots \quad 507)$$

wenn man unter T die Anzahl der Stunden versteht, während deren die Vollbetriebsstromstärke J in der Leitung sein müßte, um so viele Wattstunden Effectverlust zu bewirken, als der Effectverlust in der Leitung während eines Jahres beträgt.

Die jährlichen Stromfortleitungskosten betragen demnach im Ganzen

$$\left.\begin{aligned} K = K_1 + K_2 + K_3 &= \frac{p_1}{100}\left[l(aq + c) + c'\right] \\ &+ \frac{p_2}{100} b \,.\, J^2 \frac{l\varrho}{q} + \beta T \,.\, J^2 \frac{l\varrho}{q} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 508)$$

oder

$$K = \frac{p_1}{100} laq + \frac{p_1}{100}(lc + c') + J^2 \frac{l\varrho}{q}\left(\frac{p_2}{100} b + \beta T\right).$$

Dieser Ausdruck, nach absteigenden Potenzen von q geordnet, hat also die Form

$$K = Aq + B + \frac{C}{q},$$

wobei

$$A = \frac{p_1}{100} la; \quad B = \frac{p_1}{100}(lc + c') \text{ und } C = J^2 l\varrho\left(\frac{p_2}{100} b + \beta T\right).$$

[1]) Die Vollbetriebsstromstärke ist die Stromstärke bei der größten Leistung der Betriebsanlage, also z. B. bei einer Beleuchtungsanlage die für die größte Anzahl der gleichzeitig brennenden (nicht der angeschlossenen) Lampen erforderliche Stromstärke. — l. c., S. 65.

Der Werth von K wird ein Minimum für einen Werth von q der der Bedingung

$$\frac{\partial K}{\partial q} = A - \frac{C}{q^2} = 0$$

genügt [1]), also für

$$q = \sqrt{\frac{C}{A}} = \sqrt{\frac{J^2 l \varrho \left(\frac{p_2}{100} b + \beta T\right)}{\frac{p_1}{100} l a}},$$

oder, wenn wir diesen bestimmten Werth von q, der der sogenannte wirthschaftliche Querschnitt ist, zugleich mit q' bezeichnen,

$$q' = J \sqrt{\frac{\frac{p_2}{100} b + \beta T}{\frac{p_1}{100} \cdot \frac{a}{\varrho}}} \quad \ldots\ldots\ 509)$$

Indem Hochenegg die Größen

$$z_2 = \sqrt{\frac{p_2}{100} b + \beta T}, \text{ Betriebszahl} \quad \ldots\ 510)$$

und

$$z_1 = \sqrt{\frac{p_1}{100} \cdot \frac{a}{\varrho}}, \text{ Leitungszahl} \quad \ldots\ 511)$$

genannt, einführt, kommt er zu dem in der Formel

$$q' = J \frac{z_2}{z_1} \quad \ldots\ 512)$$

ausgedrückten Lehrsatze: der wirthschaftliche Querschnitt ist gleich der Vollbetriebsstromstärke multiplicirt mit dem Quotienten der Betriebszahl durch die Leitungszahl.

Wenn man den Spannungsverlust, der im Leiter von der Länge l und vom wirthschaftlichen Querschnitte q' bei der Vollbetriebsstromstärke J stattfindet, den wirthschaftlichen Spannungsverlust nennt und mit δ' bezeichnet, so erhält man aus $\delta' = J \frac{l \varrho}{q'}$ nach Einsetzung des Werthes von q' aus Formel 511

$$\delta = l \varrho \frac{z_1}{z_2} \quad \ldots\ 513)$$

---

[1]) Daß hier ein Minimum von K eintritt, ergibt sich aus dem offenbar positiven Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten $\frac{\partial^2 K}{\partial q^2} = \frac{2C}{q^3}$ für alle positiven Werthe von q.

Und nennt man endlich die auf die Flächeneinheit des wirthschaftlichen Querschnittes kommende Vollbetriebsstromstärke $\frac{J}{q'}$ die wirthschaftliche Stromdichte und bezeichnet sie mit J_1', so erhält man

$$J_1' = \frac{z_1}{z_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 514)$$

Besonders bemerkenswerth ist hier noch folgendes. Bezeichnet man mit P die volle Leistung der Betriebsanlage, also $P = J\Delta$, wobei J die Vollbetriebsstromstärke und Δ die Betriebsspannung ist, so kann man in die Formel 511 $J = \frac{P}{\Delta}$ einsetzen, wodurch dann ersichtlich wird, daß der wirthschaftliche Querschnitt bei gegebener Leistung P der ersten Potenz der Betriebsspannung verkehrt proportional ist, nicht aber deren Quadrate, wie manchmal irrthümlich vorausgesetzt wird.

123 **Erwärmung der Stromleiter.** Ein stromleitender Draht erleidet durch die bei der Electricitätsbewegung erzeugte Wärme (Stromwärme genannt, §. 39) eine Temperaturerhöhung, die, sobald ein stationärer Zustand in der Wärmebewegung eingetreten ist, zu einer constanten höheren Temperatur führt. Für diese Temperaturerhöhung oder „Uebertemperatur" ϑ sind verschiedene Formeln aufgestellt worden, die das gemein haben, daß sie ϑ dem Quadrate der Stromstärke i direct und der dritten Potenz des Drahtdurchmessers d verkehrt proportional setzen.

Dies ergibt sich wohl aus dem Joule'schen Gesetze für die in jeder Zeiteinheit entwickelte Stromwärme Q, nämlich

$$Q = Ai^2r \quad \ldots \ldots \ldots \quad 515^{1})$$

wobei A das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit[2]) bedeutet, und aus der Annahme, daß die Temperaturerhöhung der Stromleistung i^2r direct und anderseits der die Abkühlung vermittelnden Oberfläche s des Leiters verkehrt pro-

---

[1]) Für die in einem Zeitdifferentiale dt entwickelte Stromwärme dQ gilt also der Ausdruck

$$dQ = Ai^2r\,dt \quad \ldots \ldots \ldots \quad 516)$$

folglich für die in der Zeit t entwickelte Wärme

$$Q = Ar\int_0^t i^2\,dt \quad \ldots \ldots \ldots \quad 517)$$

woraus sich für ein constantes i und für $t = 1$ der Ausdruck 514 ergibt.

[2]) Das ist rund 0,24 Grammcalorien für 1 Joule. Siehe §. 23, Formel 53II und §. 24, Formel 58. Ferner §. 39, Formel 103II und §. 94, Formel 335.

portional sei[1]). Also $\vartheta = C_0 \frac{i^2 r}{s} = C_0 \frac{i^2 l \varrho}{s q}$, wobei wieder l die Leiterlänge in Metern, q den Leiterquerschnitt in Quadratmillimetern und ϱ den specifischen Widerstand in Ohm der Kupfersorte des Leiters bezogen auf $l = 1$ m und $q = 1$ mm² bedeuten. Auch die Oberfläche s soll in Quadratmillimetern ausgedrückt werden, also $s = 1000\, l u$, wenn u den Drahtumfang in Millimetern bedeutet. Man erhält dann

$$\vartheta = \frac{C_0}{1000} \cdot \frac{i^2 l \varrho}{l u q} = C \frac{i^2 \varrho}{u q},$$

wenn man $\frac{C_0}{1000} = C$ setzt.

Führt man endlich den Drahtdurchmesser d ein, mittelst der Ausdrücke $u = \pi d$ und $q = \frac{\pi d^2}{4}$, also $uq = \frac{\pi^2}{4} \cdot d^3$, so ergibt sich

$$\vartheta = \frac{4}{\pi^2} \cdot C \cdot \frac{i^2 \varrho}{d^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 518)$$

Die Werthe von $C' = \frac{4}{\pi^2} C \varrho$, also auch die Werthe von $C = \frac{\pi^2 C'}{4 \varrho}$, wobei $\varrho = 0{,}0175$ angenommen wird, können den Angaben verschiedener Autoren entnommen werden, welche Angaben zwar theilweise sehr auseinandergehen, aber doch in so weit übereinstimmen, daß man z. B. für blanke Drähte in ruhiger Luft etwa $C = 90$, bei isolirten Drähten je nach Isolation und Verlegungsart $C = 56$ bis $C = 40$ und bei blanken Drähten im Freien etwa $C = 22$ annehmen kann[2]).

Nimmt man nun für ϑ einen bestimmten Werth, z. B. $\vartheta = 10^0$ C., als zulässige Uebertemperatur an, so erhält man aus Formel 517 die dieser zulässigen Erwärmung entsprechenden Werthe für i oder d, d. i. die sogenannte feuersichere Stromstärke u. s. w. Also z. B.

$$i = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{t}{C} \cdot \frac{d^3}{\varrho}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 519)$$

Diese Formel würde z. B. unter der Annahme $t = 10$ und $C = 35$[3]) für einen 10 mm dicken Kupferdraht $i = 200{,}7$, also rund 200 Ampère als noch zulässige Stromstärke ergeben.

---

[1]) Wir folgen bei dieser Entwickelung, so wie bei den im vorhergehenden Paragraphen gegebenen Entwickelungen der bereits citirten Arbeit von C. Hochenegg.

[2]) C. Hochenegg, l. c., S. 8.

[3]) l. c., S. 9.

Alphabetisches Register.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)

A.

Abzweigungswiderstand 211.
Accumulator siehe Sammler.
Aequivalent, calorisches der Arbeit 30.
—, electrochemisches 57.
—, electrolytisches 57.
—, mechanisches der Entladung 49, 74.
—, mechanisches der Wärme 30.
— -wärme 191.
Ampère 55.
— -meter 202, 203, 212.
— -Stunde 58.
— -Windungen 104, 106, 129, 132.
— —, erforderliche für Induction B 153.
— —, deren Ermittelung für Dynamo 149.
Anker, Abmessungen 147, 148.
— -Constante 139.
— -Drähte (Zahl der) 139.
—, Kurzschluß- 265.
— -Rückwirkung 148, 154.
— -Strom 144.
Anlaßwiderstände 283.
Ansammlungsapparate, electrische 45.
Antrieb 96.
Aperiod. Zustand 208.
— Entladungen 263.
Aphel 92.
Arbeit 26, 96.
—, electrische 75.
Arbeitsstärke 32, 97.
— -strom 286.
— -übertragung 285.
Arbeitsvermögen 29, 48, 73.
— -vorrath 29, 48, 73.
Arnold 147.
Aron 196.
d'Arsonval 212.
Astasirung 206, 207.
Ayrton 81.

B.

Baden-Powell 83.
Barie 14.
Bedell 240.
Benischke 231.
Beschleunigung 16.
—, Normal- (der Schwere) 17, 20.
Bessel 2.
Betriebszahl 295.
Biot-Savart'sches Gesetz 216, 219, 286.
Biscan 147.
Bláthy 229, 233, 268.
Börner 24.
du Bois 133, 209.
Boltzmann 46, 172.
Bosanquet 108, 117, 124, 135.
Bouguer 2.
Braun 208.
Briot 76, 165, 208.
Brockhaus 36.
Brown 283.
Bürstenverschiebung 154.

C.

Calorie 30, 97.
Capacität, electromagnetische 70, 179.

Capacität, electrostatische 44.
—, magnetische 37.
— eines Sammlers 194.
— eines Widerstandsgefäßes 190.
— im Wechselstromkreise 255.
Cardew 202.
Carpentier 212.
C-G-S-System 10, 11.
Characteristik 135.
—, Abhängigkeit von der Tourenzahl 139.
—, äußere 136.
—, innere 136.
—, Gleichungen der 137, 139.
Clark 59, 60, 176, 192, 193.
Clausius 158, 189.
Coërcitivkraft 118.
Compoundmaschine 141, 146.
Condensator, electrischer 45, 170.
—, Cylinder- 47, 73, 170.
—, Kugel- 46, 171.
—, Luft- 46.
—, Platten- 46, 72, 170, 171.
— im Wechselstromkreise 253.
—, Ladung und Entladung 173.
—, scheinbarer Widerstand 254.
Congreß-Einheiten 11.
Copien 7.
Coriolis 26, 29.
Corsepius 147, 292.
Coulomb 57.
Coulomb'sches Gesetz 5, 7, 101, 158.
Crehore 240.
Crompton 212.
Curie 172.
Czeija und Nißl 218.

D.

Dämpfer 209.
Dämpfung 208, 209.
Daniell 49, 60, 80, 167, 168, 191, 192, 193.
Decrement, logarithmisches 209.
Deprez 136, 138, 148, 212, 290.
Déri 233, 268.
Diaphragma 172.
Dielectricitätsconstante 46, 171.
Dietrich 137, 138, 139, 145, 149.
Dimensionsformeln 7.
Dolezalek 191, 196.
v. Dolivo-Dobrowolsky 283.
Drahtspulen 154.
Drahtspulen, Widerstand der 155.
Drehfeld 255, 264, 266.
Drehstrom 264.
— -Motor 264, 273.
— —, asynchroner oder synchroner 265.
— —, zwei- oder mehrphasiger 273.
— — mit einfachem oder mehrfachem Drehfeld 274.
Drehungsmoment 28.
—, magnetisches 41.
—, eines Motors 284.
Dreieck d. electromotorischen Kräfte 242, 245.
— -schaltung 277, 280.
—, Strom- 246.
— Widerstands- 247.
Dreiphasenstrom 274.
Drexler 34, 212.
Drosselspule 250.
Dub 37, 113.
Duddell 261.
Dynamodrähte 154.
Dynamomaschinen, Berechnung der 146.
—, Characteristik der 135.
—, electromotorische Kraft der 61, 146.
—, Güteverhältniß der 139.
—, magnetischer Stromkreis der 130.
—, Schaltungsarten der 140, 141.
—, Strom- und Spannungscurven der 143, 146.
—, Verwendung der 145, 146.
—, Wirkungsgrad der 78, 79.
—, Zahl der Kraftlinien in den 148, 164.
Dyne 10, 12, 17.

E.

Effect 32, 99.
Effective Strom- u. Spannungswerthe 240.
Einheiten, absolute 3.
—, C-G-S- 11.
—, Congreß- 11.
—, Gaußische 3.
— practische 12.
Eisenpulver, magnetisches Verhalten d. 116.
Eisler 117.
Electricitätseinheit, electromagnetische 56.
— —, electrostatische 42.
— —, Verhältniß beider Einheiten 81.
Electricitätsgewicht 76.
Electricitätsmenge 42, 56.
Electrodynamometer 202.

Electrometer 165.
Electromotor siehe Motor und secundäre Maschine.
Electromotorische Kraft 58.
— — einer Dynamomaschine 61, 146.
— — verschiedener Elemente 60, 191, 192.
— — der Induction 220.
— — der Polarisation 193.
— — der Sammler 194.
Elphistone 135.
Elsaß 172.
Emsmann 15, 34.
Energie, actuelle 29.
—, electrische 48, 73.
—, kinetische 29.
— der Lage 29.
—, magnetische 223.
—, potentielle 29, 48.
—, statische 29.
Entladung, electrische 49.
— —, aperiodische oder oscillirende 263.
Eötvös 24.
Erdinductor 40, 234, 235.
Erdquadrant (Henry) 224.
Erg 27.
Erhard 244, 277.
Ettingshausen, Albert v. 60, 72, 192, 208.
Ettingshausen, Andreas v. 83, 84, 99.
Everett 15, 34, 80, 168.
Ewing 104, 105, 107, 113, 118, 119, 124, 125, 126.
Exner, F. 80, 167, 177.
Extrastrom 224.

F.

Farad 71.
Faraday 84, 172, 233, 268.
Farbaky 194, 195, 196, 197, 198.
Fechner 216.
Feddersen 264.
Feld, electrisches 43.
—, magnetisches 38, 102.
—, — der Erde 39.
— -stärke 39, 40, 106, 111.
— —, maximale 163.
— —, Steigerung durch Polschuhe 163.
Feldmann 246, 251.
Ferguson 167.
Ferraris 3, 13, 237, 247, 253, 260, 262, 265, 266, 267, 273, 280.
Feußner 189.
Fischer-Hinnen 147.
Flächendichte, electrische 164.
—, magnetische 37, 100.
Fleeming Jenkin 70.
Fleming 109, 123, 132.
Fleming'sche Regel 59.
Fliehkraft 23.
— unter dem Aequator 91.
Förderreuther 267.
Foucault 117.
Fourier 8.
Frank Geraldy 154.
Franklin'sche Tafel 46.
Frisch 248.
Frölich 104, 105, 114, 131, 134, 136, 137, 143, 145, 149, 172, 173, 178, 290.
Fromme 101, 112, 113.
Funken, electrische 167.
— -länge 168, 170.

G.

Galilei 1, 83, 84, 86.
Galvanometer 198.
—. aperiodisches 209.
—, astatisches 207.
—, ballistisches 201.
—, calor. oder Hitzdraht- 202.
—, Dämpfung d. 208, 209.
—, electrochemisches oder Voltameter 204.
—, electrodynamisches 202.
—, electromagnetisches 199.
— -function 205.
— mit Nebenschluß 210.
—, Richtigkeit, Genauigkeit und Empfindlichkeit d. 205, 206, 207.
— mit Schutzring 208.
— mit Spiegelablesung 206.
Ganz u. Co. 164, 214.
Gaugain 172, 173, 218.
Gauß 3, 4, 11, 12, 15, 40, 102, 113, 158, 170, 206, 209.
Geschwindigkeit 16.
Gewicht 19, 84.
Gewichtseinheit 20.
Gleichspannungsmaschine 141, 146.
Glockenmagnet 202, 209.
Gordon 172, 173.
Gramm-Ring 267, 273, 282.
Gravitation 91.
—, Beispiele 16, 18, 19.

Gravitation, Constante der 23, 89, 95.
—, Gesetz der 23, 158.
Grawinkel 147, 176, 182.
Green 158, 208.
Griffith 97.
Grundmaße 2, 6.
Günther 2.
Güteverhältniß 139.
Guttapercha, spec. Widerstand der 69.

H.

Häcker 101.
Hallwachs 196.
Hansen 85.
Harris 173.
Hartmann u. Braun 202, 212.
Haselwander 284.
Haubner 113.
Hauy 207, 208.
Hectomegadyn 18.
Hectowatt 33, 34.
Hefner 169.
Helmert 20, 21, 87, 94.
Helmholtz 6, 82, 97, 191.
Henry 224, 225, 229, 230.
Hertz 82, 261.
Hesse, F. A. 229.
Hochenegg 70, 293, 295, 297.
Holtz 169.
Hopkinson, J. 118, 135, 136, 149, 172.
Hoppe 196.
Hospitalier 133.
Hummel 212, 213.
Huyghens 86.
Hysteresis 117.
— -Schleife 122.
—, Versuchsmethoden 127.

J.

Jacobi 104.
Jacottet 180.
Jenkin 172, 173, 177, 179, 180.
Impedanz 247.
Inductanz 247.
Induction, electrische 58, 59.
— —, Coëfficient der 230.
— —, gegenseitige 230.
—, magnetische 108, 109.
Inductionsarbeit 286.
— -capacität, specifische 171.
— -motor 283.
Inductive Leiter 245.
— —, Parallel- und Serienschaltung der 250.
Interferricum 131, 133.
Jolly's Waage 95.
Joule 27, 30, 31, 33, 35, 75, 97.
Joule'sches Gesetz 52, 203, 239.
Isolationsmessung 183, 184.
— -strom 183.
— -widerstand 180, 181, 182.

K.

Kabel 176.
—, äquivalente Zeiten 177.
—, Capacität 180.
—, Curven des an- und absteigenden Stromes 177, 178.
—, Isolationsstrom 183.
—, Isolationswiderstand 180, 182.
—, Sprechgeschwindigkeit 176.
—, Stromwellen 179.
Kapp 115, 123, 133, 135, 139, 147, 149, 164, 212, 237.
Kapp-Linien 112.
Kareis 179.
Kelvin s. Thomson, W.
Keppler 92.
Keßler 218, 219.
Ketten, hydroelectrische 191.
Kilometrisches System 18.
Kilowatt 33, 34.
Kirchhoff 234.
Kittler 59, 60, 115, 121, 123, 128, 131, 136, 137, 139, 147, 148, 154, 164, 192, 202, 205, 209, 213, 229, 231, 233, 237.
Klemenčič 81.
Klemmenspannung 144, 221, 242, 270, 287.
Köpsel 169, 170.
Kohlrausch, F. 3, 4, 5, 60, 63, 65, 80, 81, 102, 190, 191, 192, 201, 204, 205, 212, 231, 234, 235.
— u. Heydweiller 66, 187.
— u. Holborn 69.
Kraft 17.
—, electromotorische 58, 60, 61, 146, 191, 192, 193.
—, lebendige 29, 96, 98.
—, magnetische 39.
Krafteinheit 2, 17.

Krafteinheit, astronomische 88.
—, C-G-S- 10, 17.
—, Gaußische 3.
—, kilometrische 18.
—, terrestrische 21.
Kraftfunction 158.
Kraftlinien 40, 160.
— -fluß 130.
— -zahl 40.
— — in einer Dynamomaschine 148, 164.
— — in einem Magnetstabe 37, 162.
— — der Quantitätseinheit 161.
Kraftübertragung 285.
Kravogl 286.
Kreisproceß, magnetischer 119.
Kunstphase 255, 267.
Kurzschlußanker 265.

L.

Läufer 265, 282.
Lamont 104, 114, 115.
Leibnitz 29.
Leistung s. Effect.
—, disponible und nutzbare 284, 287.
Leiter, inductive und inductionsfreie 245.
—, zersetzbare 190.
Leitungen, electrische, deren Bemessung 292.
Leitungsfähigkeit, electrische 69.
—, magnetische 130.
Leitungswiderstand s. Widerstand.
Leitungszahl 295.
Lenzisches Gesetz 208, 286.
Lenz-Jacobi'sches Gesetz 104.
Leydener Flasche 45, 46, 48, 74.
Lichtbogen, electrischer 169.
Liebenow 195, 196.
Lindeck 189.
Liter 15, 90.
Littrow, J. 16, 84.
Littrow-Weiß 92.
Loppé 195.

M.

Mach 27, 84, 97, 169.
Macfarlane 167.
Magnetismus, freier 99, 100.
— —, Anordnung desselben 162.
—, specifischer 37, 106.
—, wirksamer 136.
Magnet. Axe 102.
Magnet. Capacität 37.
— Feld und Feldstärke 38, 39, 40.
— — der Erde, Messung 102.
— — in einer Stromspirale 106, 11
— — rotirendes oder oscillirendes 26
— Flächendichte 37, 100.
— Induction 108, 109.
— Kraftfluß 130.
— Kreisproceß 119.
— Leitfähigkeit 130.
— Maximum 112.
— Moment 36, 101.
— Permeabilität 106, 107, 109, 110.
— —, deren Messung 111 (Permeameter 235 (ballistische Methode).
— Pole 37, 38, 102.
— Quantitätseinheit 3, 36.
— Remanenz 117, 118.
— Rückstand 117, 118.
— Sättigungsgrad 103.
— Stromkreis 130.
— Susceptibilität 105, 112.
— Verhalten von Eisen- und Stahlsorte 116.
— Widerstand 128, 129.
— —, specifischer 130.
— — —, practische Einheit 131.
Magnetisirbarkeit, Grenze der 103.
Magnetisirende Kraft 106, 112.
Magnetisirung, anomale 117.
Magnetisirungs-Arbeit 121.
— -Curve 106.
— -Formeln 114.
— -Function 105.
— -Richtung 162.
— -Zahl 105.
Magnetomotorische Kraft 129.
Mascart 165, 169, 170, 193.
Masse 1, 6, 14, 83.
Masseneinheit 14.
—, astronomische 88.
— des C-G-S-Systems 11, 15.
—, Gaußische 3, 11, 15.
—, kilometrische 15.
—, terrestrische 15.
Maße 1, 83.
—, abgeleitete 4.
—, absolute 3.
—, Grund- 2.
—, mechanische 2.

phyſikaliſche 2.
itur- 1.
r- 22.
tem C-G-S 11.
außiſches 3.
diſches (terreſtriſches) 22.
lometriſches 18.
ch Maxwell 6.
ch Sahulka 88.
e 83.
ell 6, 8, 82, 87, 127, 128.
r, J. R. 30.
gn 13.
fall 98.
2, 14.
9.
yn 13.
14.
aſſe 85.
n 273.
r, H. 168.
r, J. 37, 113, 114, 115, 127, 139.
licator 200.
yn 18.

N.

eſetze 1.
chluß bei Galvanometern 210.
i Dynamomaſchinen 140, 141, 146.
Maſchine 140, 141.
legulator 140.
n 23, 84, 96.
flächen 38, 159.
i 207.
lbeſchleunigung der Schwere 17, 20.
llöſung 190.
tung 275.
ct 78.
om 145, 246.

O.

ichenſpannung, electriſche 165.
62, 63.
entimeter 64.
iſches Geſetz 51.
lzer 20.

P.

n 147.
92.
Periode 238.
Perry 81, 228, 229.
Peukert 195.
Pfaundler 13, 17, 22, 50, 60, 91, 93, 95, 191, 289.
Pferdeſtärke (Pferdekraft) 34.
—, electriſche 78.
Phaſe 238.
Phaſenläufer 283.
— -rückverſchiebung 255.
— -ſpannung 277, 278.
— -ſtröme 274, 278.
Pierre 192.
Poggendorff 83, 86, 199, 200, 206.
Polariſation 193.
Polwechſel 237.
Poncelet 26, 27, 35.
Potential 158, 193.
— der Erde auf ſich ſelbſt 97.
Potentialfunction 38, 155, 158, 193.
— —, electroſtatiſche 43.
— — — auf einer Kugel 44.
— — — auf der Erde 70.
— —, magnetiſche der Erde 38.
Poynting 24.
Preece 67, 69, 176.
Primäre Maſchine 285.
Probewickelung 137.
Prototype 90.

Q.

Quantitätseinheit, electriſche 42, 56.
— —, magnetiſche 3, 36.
— — der Maſſe 3, 11, 14, 15, 88.

R.

Reductionsfactor 200, 217.
Regnault 97.
Reithoffer 101, 127.
Reſonanz, electriſche 259.
Reynier 192.
Richer 86.
Riecke 271.
Riemann 165.
Roſenberger 2, 26, 84.
Roſetti 172.
Rowland 30, 97, 100, 105, 107, 108, 112, 130, 135, 149.

Rowland'sches Gesetz 135.
Rückleitungen 274.
Rühlmann 249.
Rühmkorff 272.
Ruhestrom 286.

S.

Sabine 176.
Sahulka 8, 18, 63, 88, 89, 249, 255, 256, 258, 259, 265, 267, 282, 283.
Sammler, electrische 194.
— —, Beziehungen zwischen Capacität und Entladungsstrom 195.
— —, Capacität 194.
— — maximale 198.
— —, electromotorische Kraft 194.
— —, Entladungsstrom 195.
— —, Formirungsarbeit 196.
— —, Klemmenspannung 194.
— —, Platten- und Säurevolumen 196.
— —, Spannungsabfall zulässiger 195.
— —, Tudor'sche 194.
— —, Wirkungsgrad 196.
Savart 216, 219.
Schenek 194, 195, 196, 197, 198.
Schiller 172, 173.
Schirmwirkung, magnetische 208.
Schlüpfung 284.
Schmidt 111.
Schneebeli 113.
Schröder 195.
Schulz 147, 152.
Schumann 244.
Schutzring 166.
Schutzwiderstand 183.
Schweigger 200.
Schwere 84.
Schwerkraft 19.
—, Verhältniß zur Fliehkraft 85.
—, Verschiedenheit auf der Erdoberfläche 92.
Schwingungen, electrische 259, 262.
Secohm 225.
Secundäre Maschine 285.
Secunde 14.
Secundenerg 33.
Secundenpendel 86.
Selbstinduction 220, 221.
—, Berechnung der 226.
Selbstinduction, Coëfficient der 221, 224.
Serienmaschine 140, 141, 146.
Siemens-Einheit 7, 63, 66.
Siemens u. Halske 73, 199, 202, 209, 211.
Siemens, Werner 181, 184, 209, 210, 211.
Siemens, W. u. C. W. Siemens 67.
Sinusbussole 200.
Smith 167.
Sohnke 115.
Spiegelablesung 206.
Ständer 267 282.
Stahl, magnetisches Verhalten 116.
Steinmetz 123, 126, 128.
Stefan 51, 100, 101, 105, 106, 112, 162, 163, 164, 226, 227, 228, 229, 238.
Sterneck, R. v. 19, 20, 92, 95.
Sternschaltung 275, 280.
Strecker 147, 176, 182.
Streuung 148.
—, Coëfficient der 154.
Strom, electrischer 50.
— —, Anwachsen und Abfallen des 220.
— -curven s. Dynamomaschine.
— -dichte 296.
— -dreieck 246.
— -einheit, electromagnetische 53, 54.
— —, electrostatische oder mechanische 43, 81.
— -fortleitungskosten 293.
— -leiter Bemessung der 292.
— —, Erwärmung d. 296.
— -leistung 52, 76.
— -maß s. Stromeinheit.
— -messung, indirecte 210, s. auch Galvanometer.
— -wärme 52.
— -wellen s. Kabel.

T.

Talent, chaldäisches 85.
Tangentenbussole 99, 205, 215, 217.
Tangentenfunction 133.
Temperaturcoëfficient des electrischen Widerstandes 189.
Tesla 255, 265, 281, 283.
Thaa, G. v. 17, 91, 93.

Thompson, Silv. P. 101, 111, 121, 134, 142, 147, 155, 291.
Thomson, J. J. 172.
Thomson, W. 6, 8, 61, 114. 165, 167, 168, 170, 208, 292.
Todd 87.
Töpler 208.
Tonne 15.
Torsionsgalvanometer 199, 201, 211.
Trägheit 83.
Trägheitsmoment 28.
Tragkraft, magnetische 99, 109.
Transformator 268.
—, Selbstregulirung d. 272.
—, Umsetzungsverhältniß 270.
—, Wirkungsgrad 271.
Trillerläufer 283.

U.

Uebertemperatur 296.
Uhr-Diagramm 241.
Umsteuerung eines Drehstrommotors 282.
Universal-Electrodynamometer 214.
Uppenborn 64, 65, 66, 124, 128, 147, 152, 153, 154, 169, 182, 186, 188, 189, 195, 221, 227, 228, 229, 292.
Urmaße 7, 90.

V.

Verbundmaschine s. Compoundmaschine.
Verdichtungswärme der Erde 97.
Verschiebungsstrom 173.
Verstärkungszahl 47.
Vertheilungszahl 46, 171.
Verwandlungszahlen 8.
Vincent 135.
Voigt 81.
Voit 292.
Volt 59.
Voltameter 204, 212.
Voltmeter 202, 203.

W.

Wärmetönung 191.
Wallentin 165.
Warburg 30, 97, 119, 120.
Warren de la Rue 168.
Waßmuth 37, 113.
Watt 33, 34, 77.
— und Voltampère 245.
— -loser Strom 246.
— -meter 212, 214.
— —, dessen Anwendung bei Drehstromanlagen 276, 278.
— -stunde 35.
Weber, H. F. 192, 228, 277.
Weber, W. 3, 4, 11, 37, 54, 55, 81, 101, 113, 127, 129, 205, 215, 217.
Wechselfeld 264.
Wechselströme 236.
—, harmonische 240.
—, Induction durch 241.
—, Leistung der 244.
—, Umformer der 264, 268.
—, verkettete 274, 277.
Wechselzahl 237.
Weinhold 127, 203.
Weiß, Edm. 16.
Wetteren 101.
Whewell 84.
Widerstand, electrischer 51, 62.
— —, Abhängigkeit von der Temperatur 70, 182, 188, 189.
— —, absolute Messung 234.
— —, Einheiten des 51, 62.
— —, inductiver 247.
— —, Isolations- 181.
— —, Ohm'scher 247.
— —, scheinbarer 247.
— —, specifischer 63, 66, 67, 186.
— — — einiger Metalle, Legirungen und Lösungen 65.
— — — des Wassers 65, 66.
— — —, Liste 187, 188.
— — —, Verhältniß der Einheiten 67, 69.
Widerstandscapacität 190.
Widerstandsdreieck 247.
Widerstandsgefäß 190.
Widerstand, magnetischer 128, 129.
— —, Abhängigkeit vom Sättigungsgrade 107, 130.
— —, Ausbreitungs- 134.
— —, Curve 107.
— —, specifischer 130.
— — — practische Einheit 131.
Wiedemann 116.

Wirkungsgrad einer Dynamomaschine 78, 79.
— einer Kraftübertragung 289.
— einer Leitung 288.
— eines Motors 78, 284, 291.
— eines Sammlers 196.
— eines Transformators 271.
Wirthschaftl. Querschnitt 293, 295.
— Spannungsverlust 295.
— Strombichte 296.
Wüllner 44, 81, 100, 172, 191, 207, 208, 262, 263.

Z.

Zamminer 65.
Zeitconstante des anwachsenden oder abfallenden Stromes 222.
Zeiteinheit 14.
Zeitmaß, absolutes 87.
Zickler 105, 109, 117, 134, 149, 180, 214.
Zipernowsky 233, 268.
Zsakula 229, 231, 233.
Zugkraft 290.

Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig.

Elemente der mathematischen Theorie der
Elektrizität und des Magnetismus
von **J. J. Thomson,**
Professor der Physik an der Universität zu Cambridge.
Autorisirte deutsche Ausgabe
von **Gustav Wertheim,**
Professor am Philanthropin zu Frankfurt am Main.
Mit 133 in den Text eingedruckten Abbildungen. gr. 8. geh. Preis 8 ℳ.

Die Erdströme
im Deutschen Reichstelegraphengebiet
und ihr Zusammenhang mit den erdmagnetischen Erscheinungen.
Auf Veranlassung und mit Unterstützung des Reichs-Postamts sowie mit Unterstützung der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften
im Auftrage des Erdstrom-Comités des Elektrotechnischen Vereins
bearbeitet und herausgegeben von
Dr. B. Weinstein,
Kaiserlicher Regierungsrath und Universitäts-Professor.
Mit einem Atlas, enthaltend 19 lithographirte Tafeln. gr. 8. geh. Preis 4 ℳ.

Die Lehre von den Tonempfindungen.
als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik.
Von **Hermann von Helmholtz.**
Fünfte Ausgabe. Mit dem Bildniss des Verfassers und 66 eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Preis geh. 12 ℳ., geb. 14 ℳ.

Vorträge und Reden
von **Hermann von Helmholtz.**
Vierte Auflage. Mit dem Bildniss des Verfassers und zahlr. Holzstichen.
Zwei Bände. gr. 8. Preis à Band geh. 8 ℳ., geb. 9,50 ℳ.

Thermodynamik und Kinetik der Körper
von **Prof. Dr. B. Weinstein.**
Erster Band. Allgemeine Thermodynamik und Kinetik und Theorie der idealen und wirklichen Gase und Dämpfe. Mit eingedruckten Abbildungen. gr. 8. geh. Preis 12 ℳ.
(Zweiter Band in Vorbereitung.)

Faraday und seine Entdeckungen.
Eine Gedenkschrift von
John Tyndall,
Professor der Physik an der Royal Institution von Gross-Britannien.
Autorisirte *deutsche* Ausgabe herausgegeben durch **H. Helmholtz.**
8. geh. Preis 4 ℳ.

Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig.

Fragmente aus den Naturwissenschaften.

Vorlesungen und Aufsätze von

John Tyndall.

Zweite autorisirte deutsche Ausgabe

nach der achten Auflage des englischen Originals übersetzt von

A. von Helmholtz und **E. du Bois-Reymond.**

In zwei Bänden. Mit Abbildungen. 8. Preis geh. à Band 8 ℳ, geb. 9,50 ℳ

Fragmente Neue Folge

von **John Tyndall.**

Uebersetzt von **Anna von Helmholtz** und **Estelle du Bois-Reymond.**

Mit einem Portrait. 8. Preis geh. 8 ℳ, geb. 9,50 ℳ

Das Licht.

Sechs Vorlesungen

von John Tyndall.

Autorisirte deutsche Ausgabe bearbeitet von

Clara Wiedemann.

Mit einem Vorwort von **G. Wiedemann.**

Zweite Auflage. Mit einem Portrait von Thomas Young und 57 Holzstichen. 8. Preis geh. 6 ℳ, geb. 7,50 ℳ

Der Schall

von **John Tyndall, D. C. L., L. L. D., F. R. S.,**

Professor der Physik an der Royal Institution von Gross-Britannien.

Autorisirte deutsche Ausgabe nach der sechsten englischen Auflage des Originals bearbeitet von

A. v. Helmholtz und **Cl. Wiedemann.**

Dritte Auflage. Mit 204 Holzstichen. 8. Preis geh. 10 ℳ, geb. 11,50 ℳ

Die Wärme

betrachtet als eine Art der Bewegung

von **John Tyndall,**

Professor der Physik an der Royal Institution von Gross-Britannien.

Autorisirte deutsche Ausgabe bearbeitet von **Anna von Helmholtz** und **Clara Wiedemann** nach der achten Auflage des Originals.

Vierte vermehrte Auflage. Mit 125 Holzstichen und einer **Tafel.**

8. Preis geh. 12 ℳ, geb. 13,50 ℳ.

Leitfaden der Wetterkunde.

Gemeinverständlich bearbeitet von

Dr. R. Börnstein,

Professor an der Königl. landwirthschaftlichen Hochschule zu Berlin.

Mit 52 Abbildungen und 17 Tafeln. gr. 8. Preis geh. 5 ℳ, geb. 6 ℳ.

8 1939